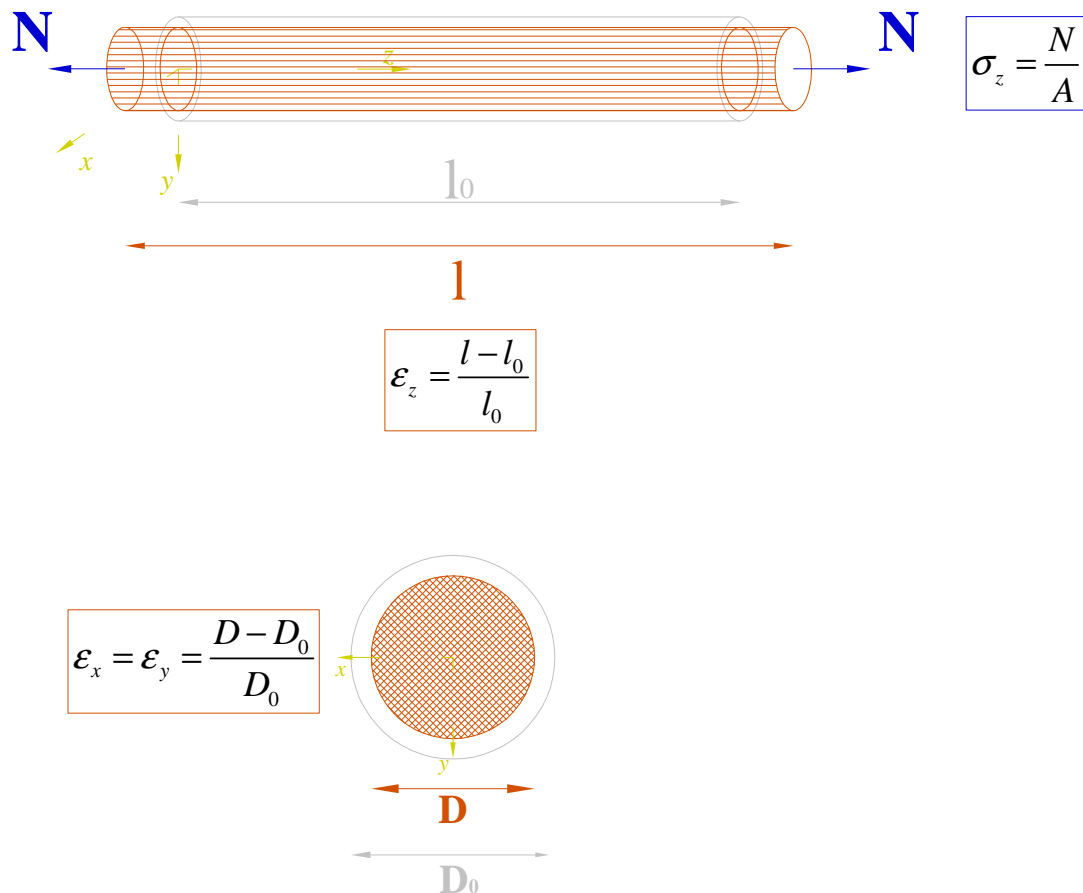


APPUNTI  
DI  
PROVE SPERIMENTALI  
E  
RESISTENZA DEI MATERIALI

Prof. ing. Francesco Trentadue

**PROVA SPERIMENTALE SU UN PROVINO DI ACCIAIO.** La prova sperimentale più comune è quella in cui si induce uno stato monoassiale di tensione in un provino di materiale. Per gli acciai, la prova più comune è la prova di trazione. In figura si rappresenta un provino cilindrico di sezione circolare soggetto a trazione:



Come già anticipato in analisi della tensione, ad una opportuna distanza dalle basi lo stato di tensione nel provino risulta monoassiale e nel riferimento locale dell'asta l'unica componente di tensione diversa da zero è  $\sigma_z = N/A$ , dove  $A$  è l'area della sezione trasversale del provino. A causa dello sforzo normale di trazione applicato si produce inoltre una elongazione in direzione assiale ed una contemporanea contrazione uniforme sul piano della sezione trasversale, per cui la sezione rimane circolare a deformazione avvenuta.

Rimandando all'analisi della deformazione i necessari approfondimenti, qui è opportuno anticipare che la deformazione longitudinale del provino (nel caso in esame una elongazione) si misura sperimentalmente come rapporto fra la variazione di lunghezza

del provino e la sua lunghezza originaria:

$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0}$$

dove l'indice  $z$  specifica che la misura si riferisce a fibre materiali orientate secondo l'asse  $z$ .

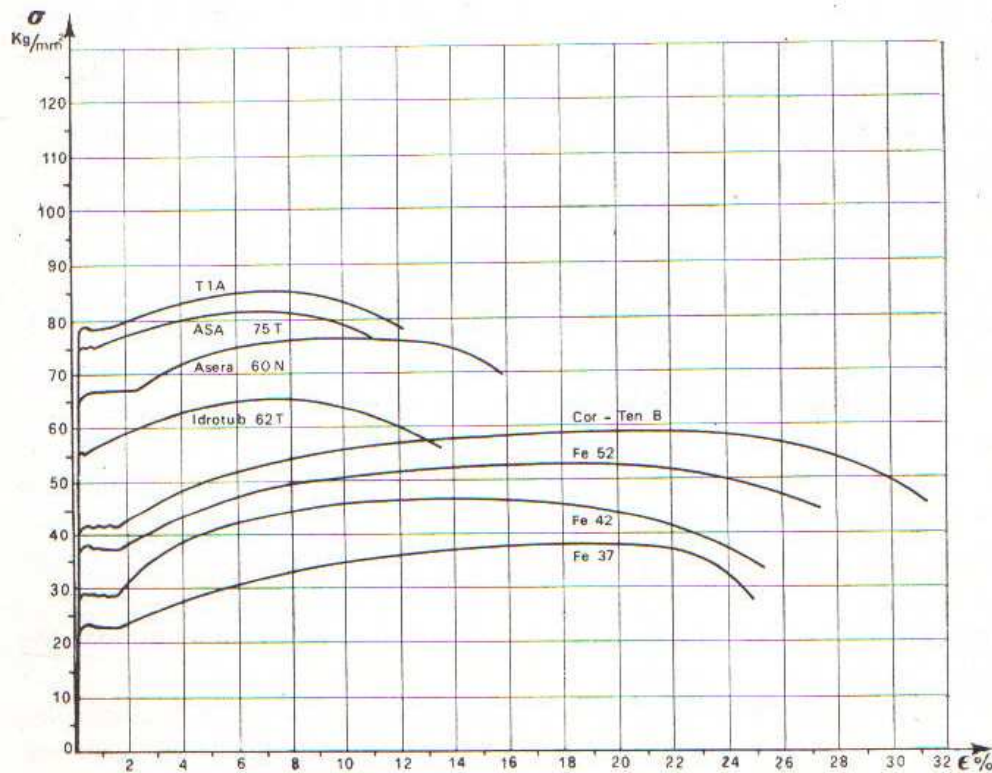
La deformazione trasversale del provino si misura come rapporto fra la variazione di diametro del provino ed il suo diametro originale. Nel caso in esame, risulta:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{D - D_0}{D_0}$$

dove gli indici  $x$  ed  $y$  specificano l'orientamento del diametro a cui si riferisce la misura. Questo comportamento sperimentale è coerente con l'ipotesi di *isotropia* dell'acciaio, comunemente accettata nell'ingegneria strutturale, che prevede che non vi sia nessuna direzione privilegiata nella *risposta meccanica* del materiale. Per questo motivo, qualsiasi piano diametrale longitudinale deve essere un piano di simmetria per il provino sia prima che dopo la deformazione e, di conseguenza, una sezione circolare, pur contraendosi, deve rimanere circolare a deformazione avvenuta.

Più in generale, in accordo con le previsioni teoriche, la sperimentazione mostra che, per piccole deformazioni, qualsiasi sezione ortogonale di un provino di materiale isotropo sottoposto a trazione, pur contraendosi, mantiene la sua forma originaria.

Il risultato di questa prova sperimentale è generalmente riassunto in un diagramma, chiamato  $\sigma$ - $\varepsilon$ , dove in ascissa è riportata la deformazione assiale  $\varepsilon_z$  ed in ordinata la tensione assiale  $\sigma_z$ . In Figura sono riportati alcuni diagrammi  $\sigma$ - $\varepsilon$  per diverse qualità di acciaio:



La figura mostra che in tutti i diagrammi esiste una *fase elastica* in cui la tensione è pressoché proporzionale alla deformazione. Le deformazioni in fase elastica scompaiono quando lo sforzo è rimosso e si caratterizzano quindi per la loro *reversibilità*. Il *legame* in fase elastica tra tensione assiale e deformazione assiale in una prova di trazione monoassiale è esprimibile tramite la relazione:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$

dove E è il modulo di Young, definibile quindi come *rapporto fra la tensione longitudinale e la deformazione longitudinale in una prova monoassiale*.

Inoltre, in fase elastica è costante il *rapporto fra la contrazione laterale e l'elongazione longitudinale* del provino. Tale rapporto, denominato *coefficiente di contrazione trasversale*, viene indicato con il simbolo  $\nu$ :

$$\nu = \frac{-\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_z} .$$

In genere è possibile, con qualche semplificazione, accettare che in fase elastica il comportamento dell'acciaio sia perfettamente lineare ed identificare il termine della fase elastica con l'inizio della fase *di snervamento*. Questa è rappresentata nel diagramma sperimentale da un tratto approssimativamente orizzontale dove si producono deformazioni *plastiche* sotto lo sforzo costante  $\sigma_z = f_y$ . Le deformazioni plastiche si caratterizzano per la loro *irreversibilità*, cioè esse non scompaiono quando lo sforzo è rimosso ed in questa fase raggiungono valori almeno di un ordine di grandezza superiori a quelli delle deformazioni elastiche.

Successivamente a questa fase si osserva una nuova fase, detta di *incrudimento*, in cui si producono ulteriori deformazioni plastiche ed il materiale mostra un recupero di rigidità. In questa fase si verificano significativi incrementi di sforzo rispetto allo sforzo di snervamento ed il provino giunge a rottura solo dopo aver subito deformazioni molto elevate.

Qui di seguito sono riportati i parametri meccanici caratteristici dell'acciaio per carpenteria metallica S235:

$$f_{yk} = 235 \text{ MPa}$$

$$f_{uk} = 360 \text{ MPa}$$

$$E = 205.000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\varepsilon_y = f_{yk} / E = 235 / 205.000 \approx 1 / 1000$$

$$\varepsilon_u \approx 30\%$$

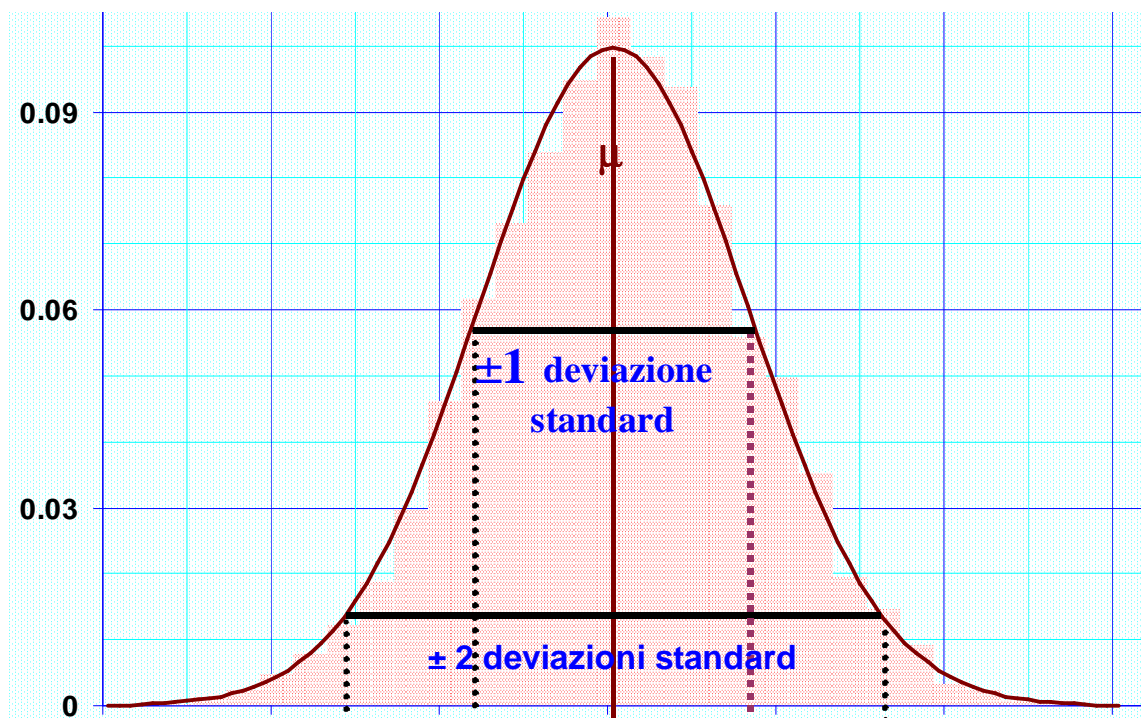
Il simbolo  $_k$  indica che il valore dichiarato è un valore *caratteristico*. Questo concetto verrà chiarito in seguito, ma qui si può già anticipare che nel caso in cui ci si riferisca alla resistenza di un materiale il valore caratteristico (con frattile inferiore 5%) *ha una probabilità del 5% di non essere superato in una prova sperimentale*.

## VALORE MEDIO, CARATTERISTICO E DI CALCOLO DELLA RESISTENZA DI UN MATERIALE

Le prove sui materiali, anche se condotte su provini il più possibile omogenei, danno luogo inevitabilmente ad una dispersione più o meno marcata dei risultati sperimentali. Quindi, se il numero di prove condotto è sufficientemente elevato, il modo più naturale per rappresentare il risultato della campagna sperimentale è quello di associare alla popolazione di misure ottenute una variabile aleatoria. Nella quasi totalità dei casi si assume che questa variabile sia di tipo Gaussiano, definita cioè da una densità di probabilità nella forma:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

che rappresentiamo nella figura che segue:



Una variabile aleatoria Gaussiana, come si nota dall'espressione della sua densità di probabilità, dipende da due soli parametri:

- Il valore medio  $\mu$ , la cui definizione generale per una variabile aleatoria generica è:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- La deviazione standard  $\sigma$ , che misura la dispersione delle singole misure attorno al valor medio, la cui definizione generale è:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x)dx}$$

Nella realtà la densità di probabilità  $p(x)$  non è nota e si dispone sempre di un numero finito (spesso limitato) di prove sperimentali, per cui i due parametri vengono *stimati* attraverso le formule:

$$\mu \cong \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \qquad \sigma \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

dove l'attendibilità delle stime cresce con il numero  $n$  dei risultati sperimentali ottenuti.

Le due stime così ottenute vengono utilizzate per dedurre il valore *caratteristico*  $f_k$  della resistenza di un materiale, generalmente, con *frattile inferiore* 5/100, definito come quel *valore della resistenza del materiale che ha una probabilità del 5% di non essere superato in una prova sperimentale*.





E' importante notare che il valore caratteristico con frattile inferiore 5/100 della resistenza di un materiale ha una probabilità troppo alta di non essere superato in una prova sperimentale affinché esso possa essere direttamente introdotto nelle verifiche strutturali. Le normative italiana ed europea prescrivono quindi di dividere i valori caratteristici per dei *coefficienti di sicurezza*  $\gamma_m$  dipendenti dalla natura del materiale.

Per l'acciaio in tondini per cemento armato risulta  $\gamma_m=1.15$ , per l'acciaio da carpenteria metallica  $\gamma_m=1.05$  mentre per il calcestruzzo si ha  $\gamma_m=1.5$ . Il valore di questi coefficienti, dipende più dall'esperienza e dal procedimento industriale per la realizzazione del materiale che da considerazioni di natura statistica.

Dividendo il valore caratteristico della resistenza di un materiale per il relativo coefficiente si ottiene quindi il valore *di calcolo* della resistenza, definito come:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m}$$

**CRITERI DI RESISTENZA.** Nelle strutture e nei corpi solidi in generale il materiale è assoggettato a stati di tensione non solo monoassiali (come quelli che si realizzano in una prova monoassiale di trazione o di compressione) ma di natura più generale (biassiali o triassiali). Poiché è difficoltoso ed antieconomico determinare direttamente per via sperimentale la capacità di resistere di un materiale soggetto a stati di tensione qualsiasi, nella meccanica dei materiali si ricercano dei *criteri di resistenza* che permettano di stimare la capacità di resistere di un particolare materiale soggetto a stati di tensione generici sulla base di un numero limitato di prove sperimentali, spesso semplicemente prove monoassiali, di trazione o compressione.

Nel caso dei materiali isotropi, la cui capacità di resistere non dipende dalle direzioni principali dello sforzo, i criteri di resistenza possono essere definiti da relazioni del tipo:

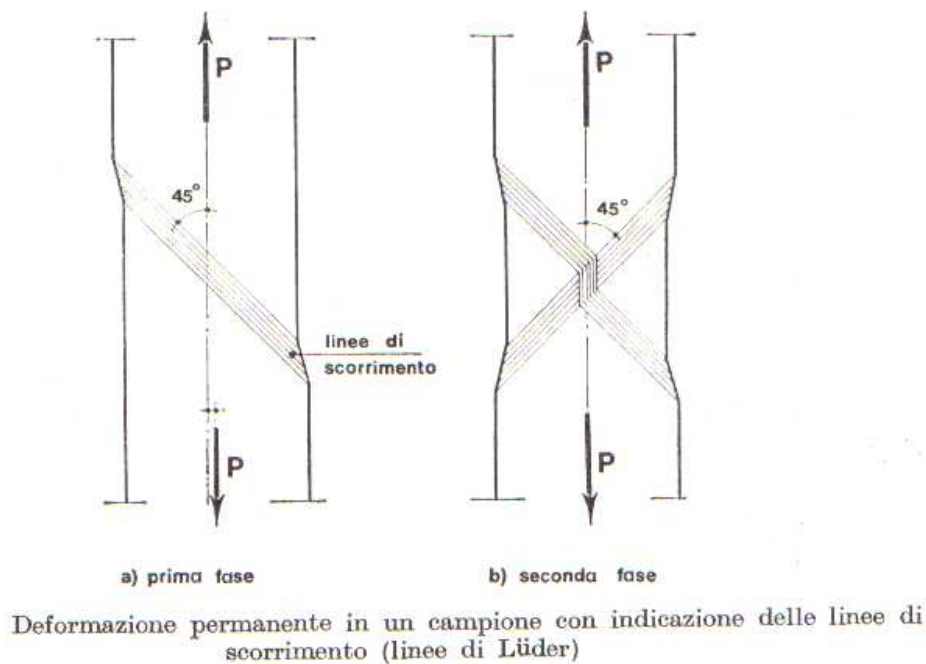
$$f(s_I, s_{II}, s_{III}, c_i) \leq 0$$

o anche:

$$g(i_1(\mathbf{T}), i_2(\mathbf{T}), i_3(\mathbf{T}), c_i) \leq 0$$

dove i parametri  $c_i$  (nei casi più semplici uno solo) dipendono dalla natura del materiale e devono essere determinati sperimentalmente.

**CRITERIO DI TRESCA** (Materiali metallici duttili). Il criterio prende le mosse da un'osservazione sperimentale che mostra che all'atto dello snervamento le deformazioni plastiche in un provino soggetto a trazione si *localizzano* secondo superfici inclinate a  $45^\circ$  gradi rispetto all'asse del provino:

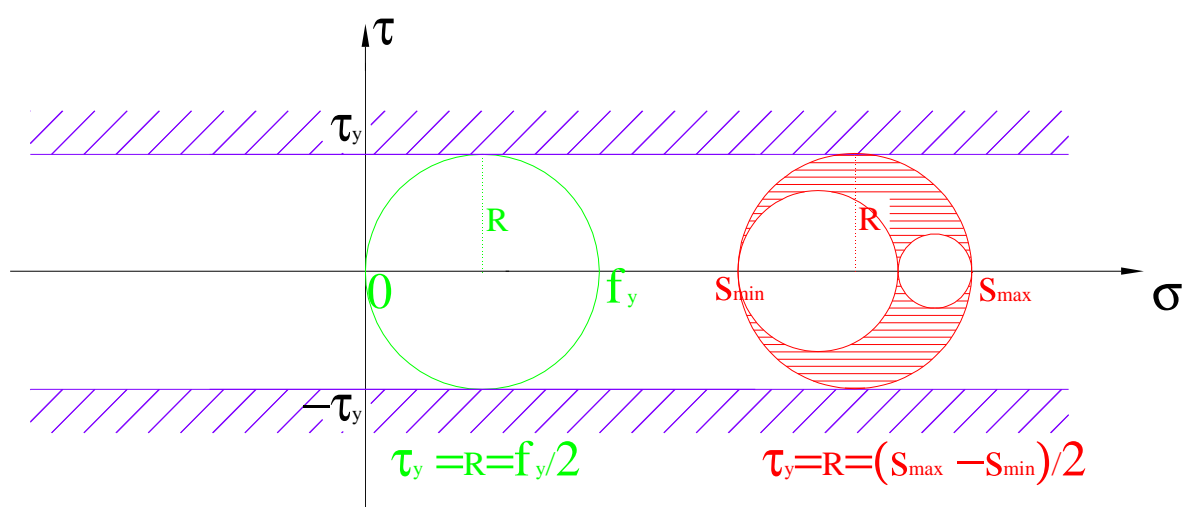


Su queste superfici, inclinate a  $45^\circ$  si realizza il massimo valore della tensione tangenziale, come si può osservare costruendo l'arbelo di Mohr relativo alla situazione in esame. E' quindi naturale, in base a questa osservazione sperimentale, formulare l'ipotesi secondo cui :

*In un materiale metallico duttile si attivano deformazioni plastiche (irreversibili) quando la tensione tangenziale massima raggiunge un valore limite caratteristico del materiale.*

Utilizzando l'arbelo di Mohr è semplice tradurre in termini analitici questo criterio di resistenza: infatti il criterio individua nel piano di Mohr un *dominio resistente* costituito da una striscia orizzontale delimitata dalle due rette  $\tau = \pm \tau_y$ , dove con  $\tau_y$  si è indicato il

valore limite della tensione tangenziale, caratteristico del materiale, che non può essere superato su tutti gli elementi piani per il punto materiale in esame. L'arbelo di Mohr potrà essere interno o tangente al dominio resistente: se l'arbelo risulterà interno al dominio il materiale rimarrà in fase elastica, altrimenti, se l'arbelo risulterà tangente al dominio resistente, il materiale svilupperà deformazioni plastiche. Stati di tensione rappresentati da un arbelo di Mohr anche parzialmente esterno al dominio resistente, se si ignora un eventuale incrudimento del materiale, sono impossibili.



In figura è riportato in verde l'arbelo di Mohr relativo ad un provino in fase di snervamento durante una prova monoassiale di trazione. Notiamo che il massimo valore della tensione tangenziale all'atto dello snervamento risulta:

$$\tau_y = R = \frac{f_y}{2} ,$$

Quindi, il valore limite  $\tau_y$  della tensione tangenziale per cui si producono scorrimenti plastici è pari alla metà della tensione di snervamento  $f_y$  dedotta da una prova monoassiale (di trazione o di compressione).  $R$  è il raggio esterno dell'Arbelo di Mohr che, come è noto, indica il massimo valore della tensione tangenziale su tutti gli elementi piani per il punto materiale in esame.

Consideriamo ora uno stato di tensione generico in cui il materiale raggiunga lo snervamento e consideriamo l'arbelo di Mohr ad esso relativo, rappresentato in rosso nella Figura. In questo caso, in base al criterio di Tresca, deve risultare:

$$\tau_y = R = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}.$$

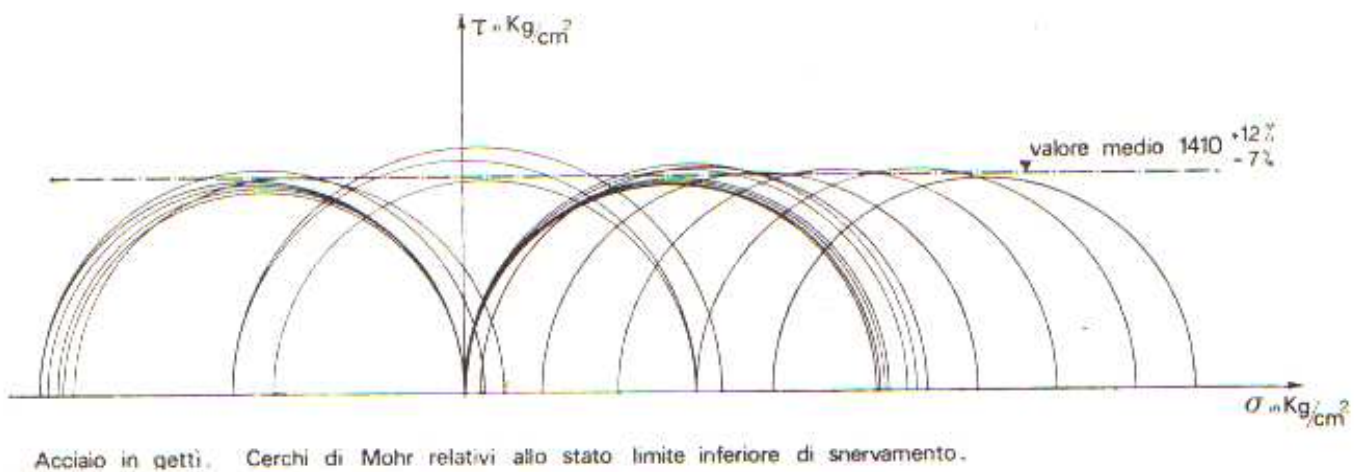
Dalle due relazioni precedenti si deduce quindi che lo snervamento si realizza se:

$$s_{\max} - s_{\min} = f_y,$$

mentre il materiale rimane in fase elastica se:

$$s_{\max} - s_{\min} < f_y.$$

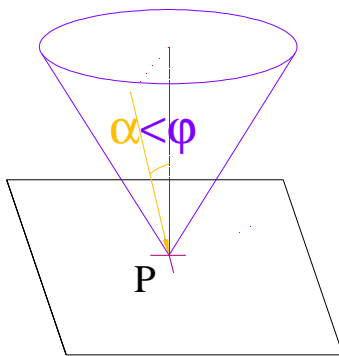
Queste relazioni forniscono previsioni in buon accordo con i risultati sperimentali.



*Si noti che il criterio di Tresca prevede, in accordo con la sperimentazione, che i materiali metallici duttili abbiano uguale resistenza a trazione e a compressione.*

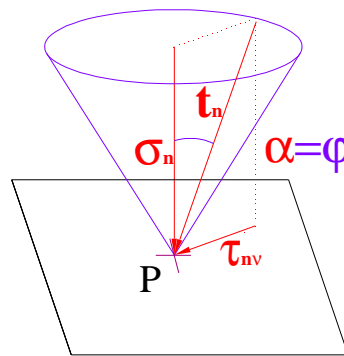
**CRITERIO DI MOHR-COULOMB** Il criterio di Mohr-Coulomb si applica a materiali sciolti, quali sabbia, ghiaia e argille normalconsolidate, che per loro natura non possono sviluppare tensioni di trazione, e si basa sull'assunzione che:

*In un materiale sciolto si attivano scorrimenti plastici quando il vettore tensione raggiunge una inclinazione limite, caratteristica del materiale e del suo stato, rispetto alla normale dell'elemento piano su cui si esercita.*



$$\alpha < \varphi$$

Non si verificano scorrimenti plastici



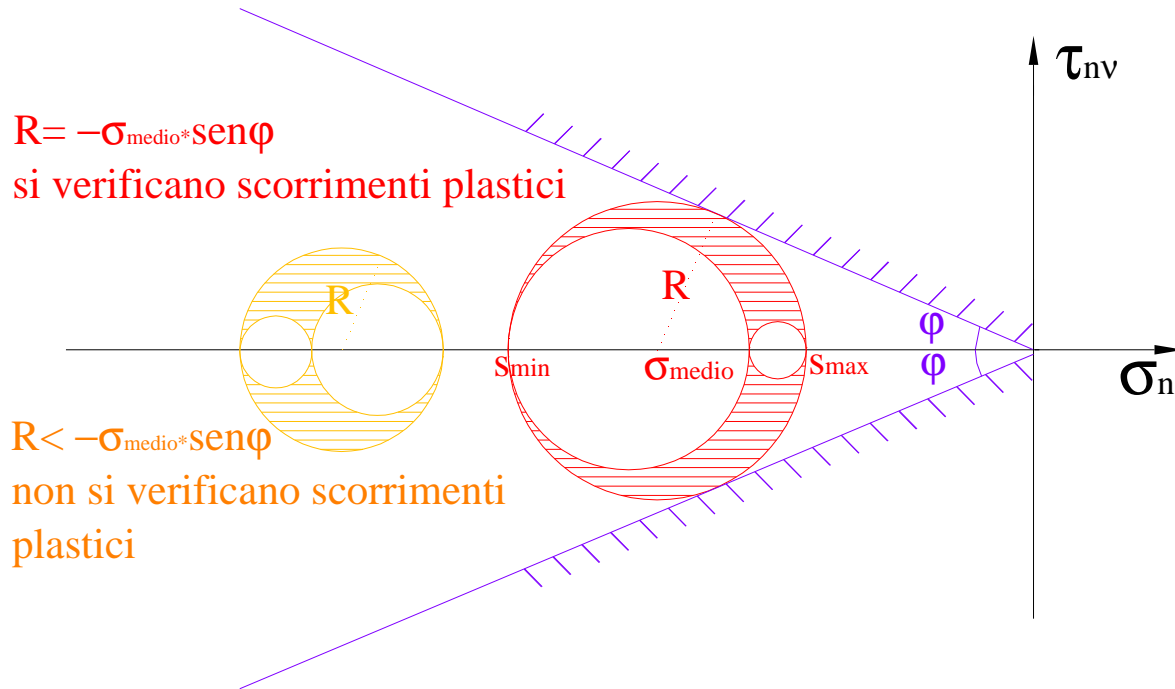
$$\alpha = \varphi$$

Si verificano scorrimenti plastici

Il valore limite  $\varphi$  dell'angolo che il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  può assumere rispetto alla normale è denominato *angolo di attrito interno* o *angolo di resistenza a taglio* e l'ipotesi appena formulata sul comportamento *plastico* di un materiale sciolto si traduce nelle relazioni:

$$\frac{|\tau_{nv}|}{-\sigma_n} \leq \tan \varphi \Rightarrow |\tau_{nv}| \leq -\sigma_n \tan \varphi \Rightarrow \begin{cases} \tau_{nv} \leq -\sigma_n \tan \varphi \\ -\tau_{nv} \leq -\sigma_n \tan \varphi \end{cases}$$

L'ultimo sistema di disequazioni definisce nel piano di Mohr un *dominio resistente* delimitato da due semirette inclinate di  $\pm\varphi$  rispetto all'orizzontale e passanti per l'origine degli assi:



Il criterio di resistenza appena formulato si esprime immediatamente anche in termini di tensioni principali. Infatti, come si nota dalla figura, deve risultare:

$$R \leq -\sigma_{medio} \sin\varphi,$$

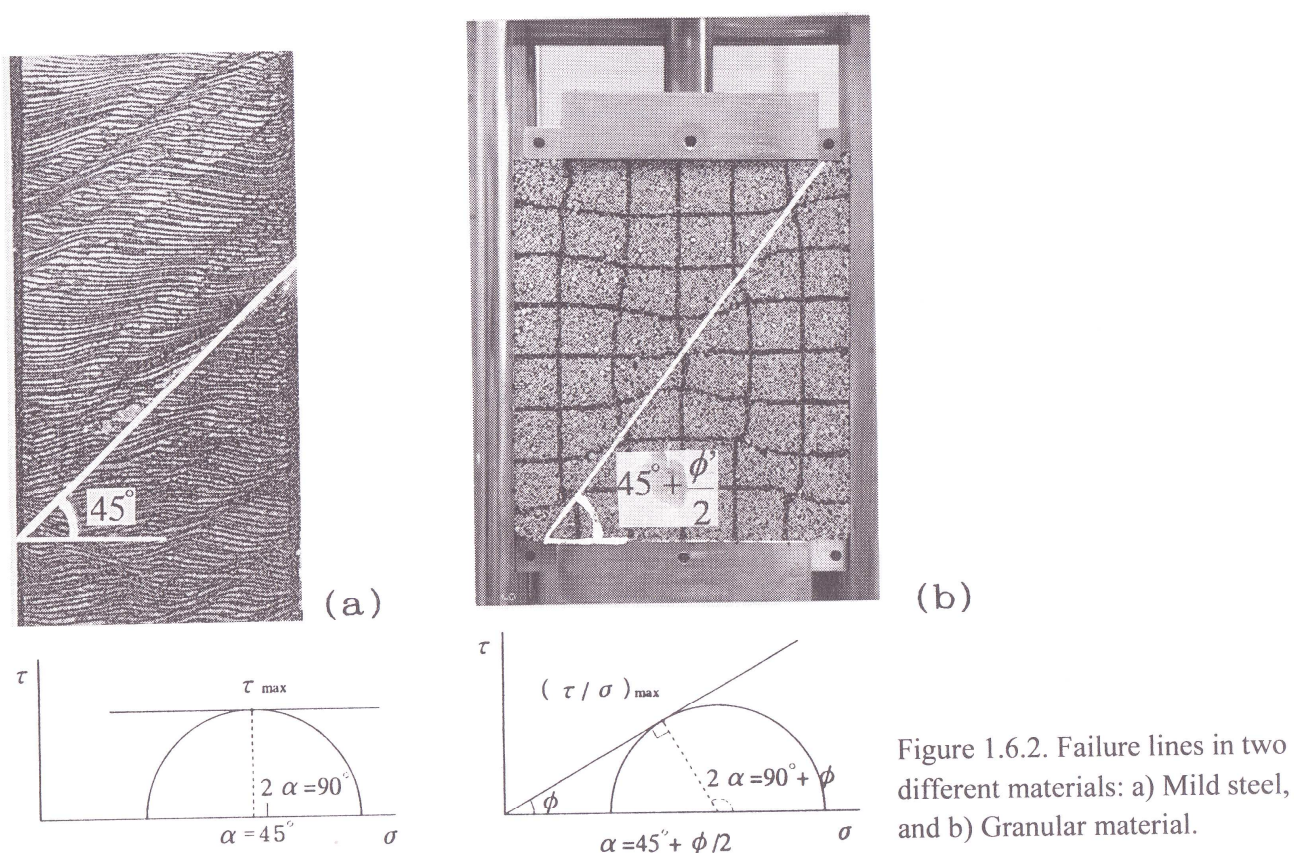
e quindi:

$$\frac{s_{Max} - s_{min}}{2} \leq -\frac{s_{Max} + s_{min}}{2} \sin\varphi.$$

Per cui, in condizioni di scorrimento plastico, quando la precedente disequazione è strettamente soddisfatta, si deduce:

$$s_{Max} = \left( \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \right) s_{min} = \left[ \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] s_{min} = k_a(\varphi) s_{min}$$

dove il coefficiente  $k_a(\varphi)$  è noto come *coefficiente di spinta attiva*. E' opportuno osservare che nelle convenzioni adottate nella Scienza delle Costruzioni le tensioni  $s_{Max}$  e  $s_{min}$  sono negative, per cui la tensione principale  $s_{Max}$  è la minore in valore assoluto. Nella Figura che segue sono riportate due prove sperimentali che mostrano come gli scorrimenti plastici si localizzino secondo superfici inclinate a  $45^\circ$  in un materiale metallico e secondo superfici inclinate a  $45^\circ + \varphi/2$  in un provino di materiale sciolto (sottoposto ad una pressione laterale di contenimento).

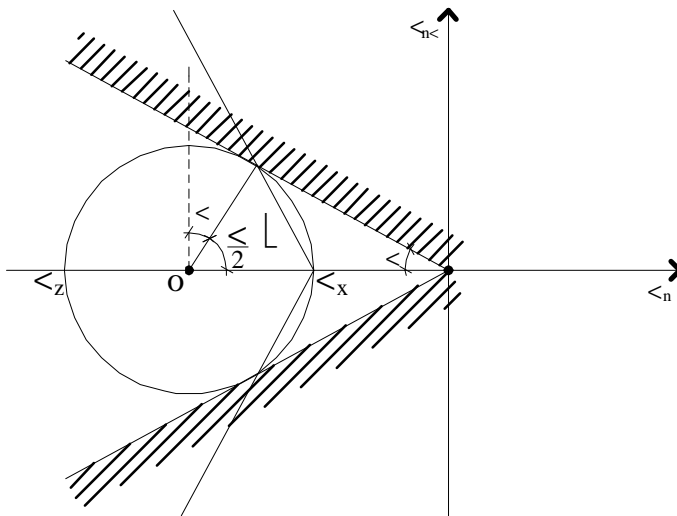
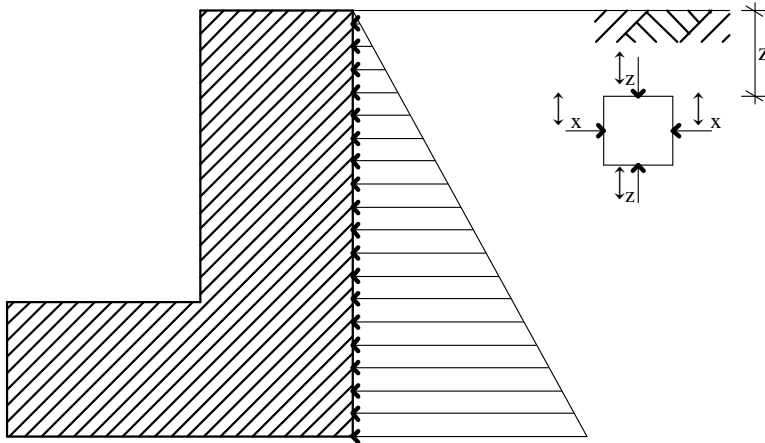


La meccanica dei materiali sciolti e le sue implicazioni ingegneristiche sono ampiamente trattate in Geotecnica. In questa sede è solo opportuno osservare che, poiché nei materiali sciolti non si sviluppano tensioni di trazione, in questa disciplina generalmente si conviene di valutare positivamente le tensioni di compressione. Comunque la costruzione del cerchio e dell'arbelo di Mohr esposta in queste dispense rimane pressoché invariata, purché si valutino positivamente le tensioni normali se di



compressione e le tensioni tangenziali se *antiorarie* (con convenzioni quindi contrarie a quelle generalmente adottate in SdC ).

## ESERCIZIO: SPINTA DEL TERRENO SU UN MURO DI SOSTEGNO



$$\sigma_z = -\gamma z$$

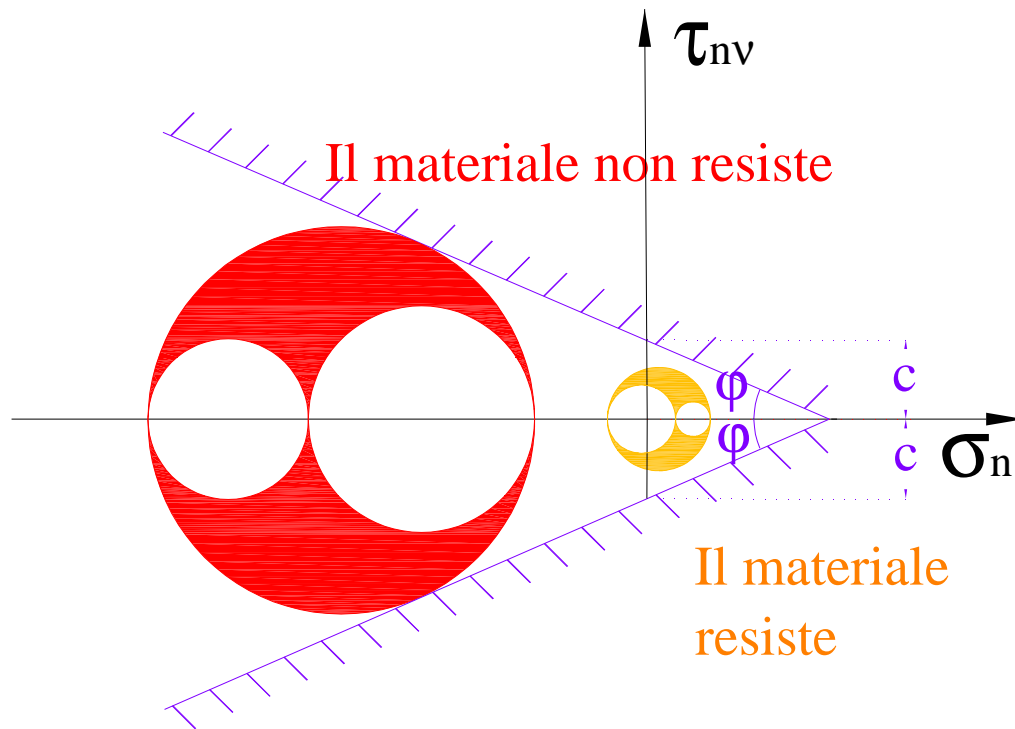
$$\gamma = 1,8 \text{ Ton} / \text{m}^3$$

$$\varphi = 30^\circ$$

In condizioni di spinta attiva:

$$\sigma_x = \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \sigma_z = k_a(\varphi) (-\gamma z) = - \left[ \left( \frac{1 - 1/2}{1 + 1/2} \right) 1,8 \text{ Ton} / \text{m}^3 \right] z = - \left[ 0,6 \text{ Ton} / \text{m}^3 \right] z$$

**CRITERIO DI MOHR-COULOMB PER MATERIALI CON COESIONE** Il criterio si applica a materiali lapidei o pseudolapidei, dotati di resistenza a trazione generalmente minore rispetto alla resistenza a compressione. Differisce dal criterio precedente perché presume che il materiale sia dotato di una *coesione* interna:



Il dominio resistente nel piano di Mohr è definito in questo caso dalla disequazione:

$$|\tau_{nv}| \leq -\sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c$$

dove compaiono i due parametri *coesione* **c** e *angolo di attrito interno*  $\varphi$ , da determinare sperimentalmente.

In termini di tensioni principali la disequazione precedente si può riscrivere:

$$R \leq (-\sigma_{medio} + c \cot \varphi) \operatorname{sen} \varphi$$

da cui si ottiene:

$$\frac{s_{Max} - s_{min}}{2} \leq -\left(\frac{s_{Max} + s_{min}}{2}\right) \operatorname{sen} \varphi + c \cos \varphi$$

Quando la precedente disequazione è strettamente soddisfatta, si ottiene la condizione di rottura:

$$s_{Max} (1 + \operatorname{sen}\varphi) + s_{min} (\operatorname{sen}\varphi - 1) = 2c \cos \varphi$$

E' infine interessante notare che il Criterio di resistenza di Tresca può ottenersi come caso particolare del criterio di Mohr-Coulomb per materiali coesivi ponendo  $\varphi=0$ .

Infatti, posto  $\varphi=0$ , dalla relazione precedente si ottiene:

$$\frac{s_{max} - s_{min}}{2} = c.$$

*Deduzione dei parametri  $\varphi$  e  $c$  da prove monoassiali (facoltativo)*

E' relativamente semplice porre i due parametri  $\varphi$  e  $c$  in relazione con i risultati di due prove monoassiali, di trazione e compressione. Infatti, in una prova monoassiale di trazione risulta  $s_{max} = f_T$  e  $s_{min} = 0$ , dove con  $f_T$  si è indicata la tensione di rottura a trazione, per cui deduciamo:

$$f_T (1 + \operatorname{sen}\varphi) = 2c \cos \varphi$$

In una prova monoassiale di compressione risulta  $s_{max} = 0$ ,  $s_{min} = -f_C$ , dove con  $-f_C$  si è indicata la tensione di rottura a compressione, per cui in modo analogo deduciamo:

$$f_C (1 - \operatorname{sen}\varphi) = 2c \cos \varphi$$

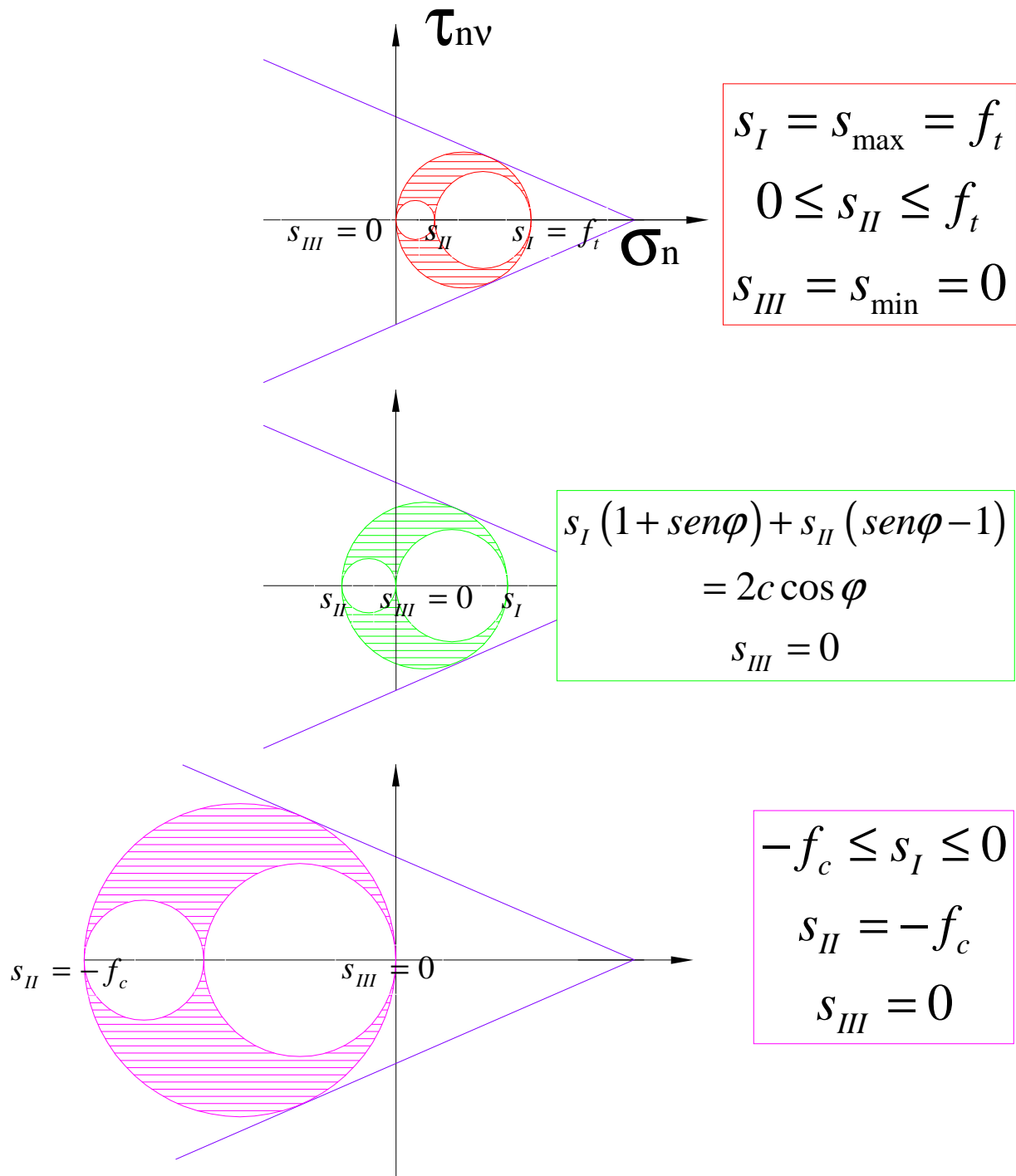
Dalle due relazioni precedenti si deduce:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{f_C - f_T}{f_C + f_T}$$

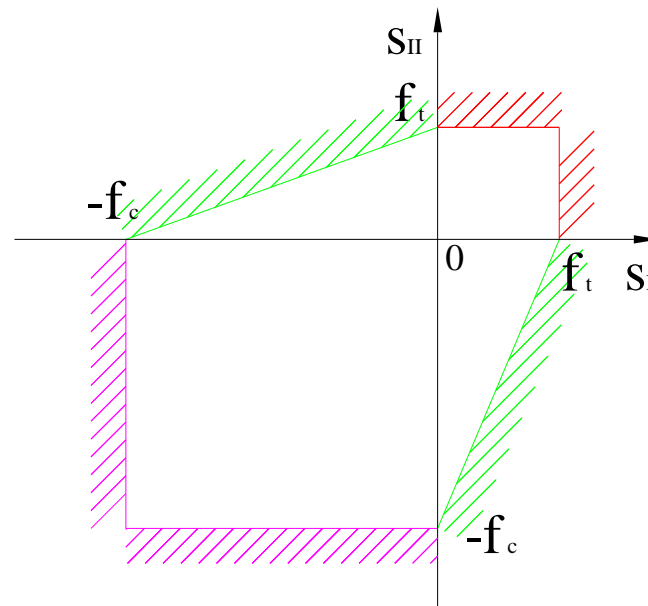
$$c \cot \varphi = \frac{f_C f_T}{f_C - f_T}$$



Stati biassiali. Supponiamo ora che una tensione principale, che indicheremo con  $s_{III}$ , sia nulla e che quindi lo stato di tensione sia biassiale. Nella figura che segue si esaminano tutte le possibili modalità di rottura ( $f_t$  ed  $f_c$  sono le tensioni di rottura nelle prove monoassiali di trazione e di compressione):



In un piano che riporta sugli assi cartesiani le due tensioni principali non nulle, il dominio resistente ha quindi la forma di esagono irregolare riportata in figura:



dove:

- Il contorno del dominio resistente rappresentato in **rosso** rappresenta il caso in cui la rottura avviene quando le due tensioni principali non nulle entrambe positive.
- Il contorno del dominio resistente rappresentato in **verde** rappresenta il caso in cui la rottura avviene quando le due tensioni principali non nulle sono una positiva ed una negativa. Si osservi che questi tratti del contorno del dominio resistente possono essere rappresentati dalle equazioni:

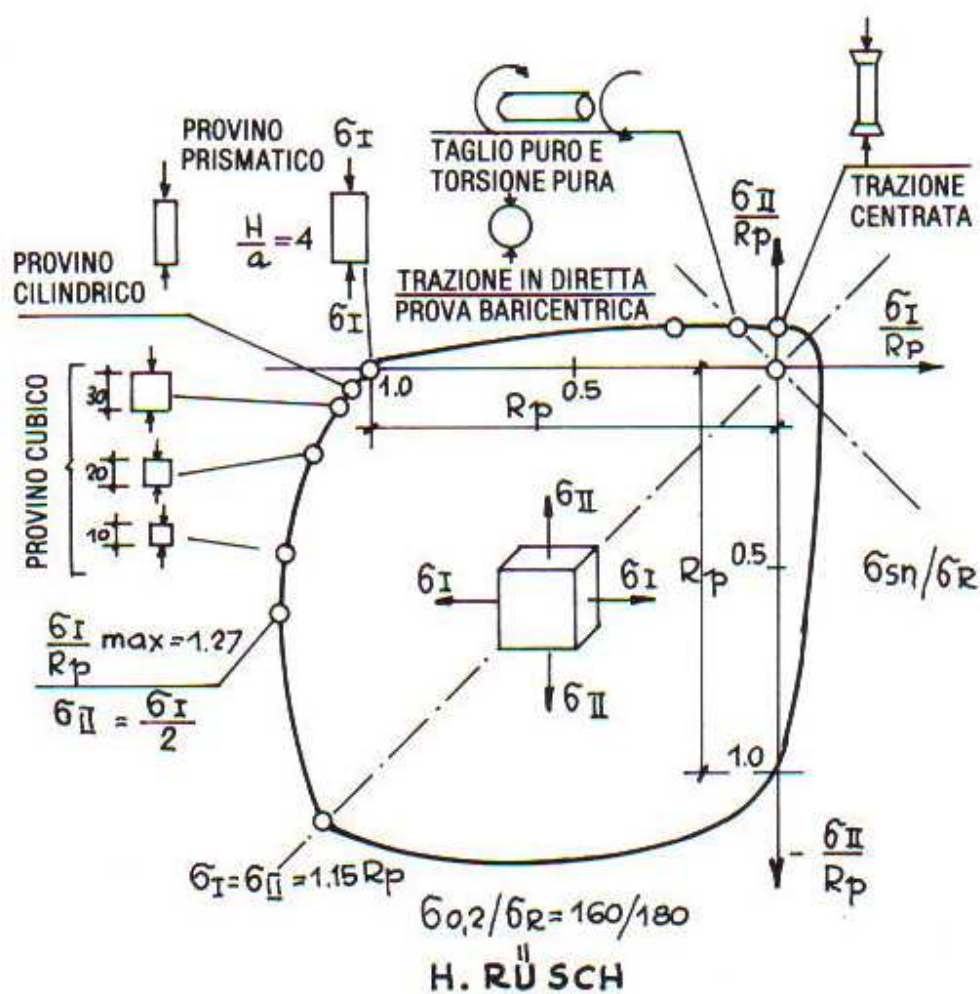
$$\frac{s_I}{f_T} + \frac{s_{II}}{-f_C} = 1 \qquad \frac{s_{II}}{f_T} + \frac{s_I}{-f_C} = 1$$

- Il contorno del dominio resistente rappresentato in **viola** rappresenta il caso in cui la rottura avviene quando le due tensioni principali non nulle sono entrambe negative.

Le previsioni ottenute con questo criterio sono sufficientemente precise per i fini ingegneristici e, per la sua semplicità, il criterio è a tutt'oggi ampiamente utilizzato.

Infine, è un utile esercizio mostrare che se  $f_t = f_c$  il criterio di Mohr-Coulomb si riduce al Criterio di Tresca. In questo caso il dominio resistente esagonale della precedente figura diventa simmetrico rispetto ad entrambe le bisettrici degli assi.

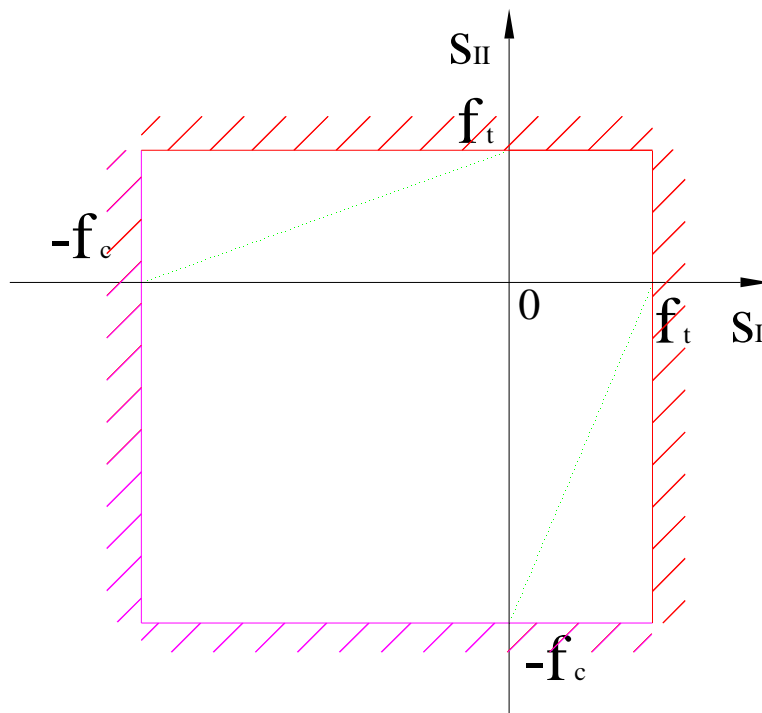
Nella figura che segue sono riportati alcuni risultati sperimentali relativi a provini di calcestruzzo soggetti a stati di tensione biassiali:



**CRITERIO DELLE MASSIME E MINIME TENSIONI.** Il criterio delle massime e minime tensioni è una semplificazione del criterio di Mohr–Coulomb ed è quindi applicabile a materiali lapidei o pseudolapidei. Esso prevede in modo accettabile il comportamento a rottura di questi materiali solo nel caso di stati di tensione biassiale e si può esprimere attraverso le relazioni:

$$\begin{cases} s_{Max} \leq f_t \\ -f_c \leq s_{min} \end{cases}$$

Nel piano di assi cartesiani  $s_I$  ed  $s_{II}$  le precedenti relazioni si traducono quindi nel dominio resistente rappresentato in figura.



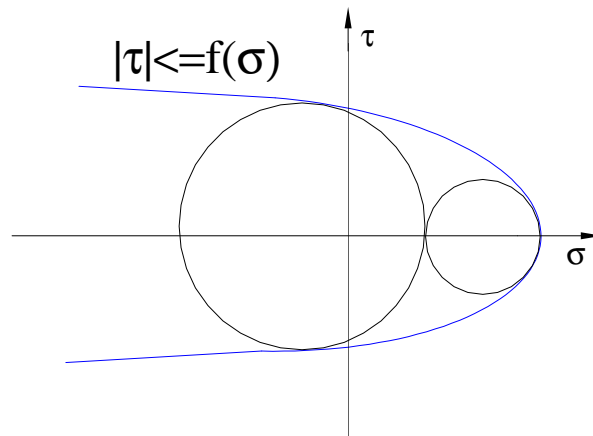
Sebbene assai rudimentale, il criterio è, a tutt'oggi, ampiamente adottato.



**CRITERIO DELLA CURVA INTRINSECA.** E' una generalizzazione dei criteri precedenti poiché considera domini resistenti definiti da leggi del tipo:

$$|\tau_{nv}| \leq f(\sigma_n)$$

dove  $f(\sigma)$  è una funzione da definire per via sperimentale.



Sebbene questo criterio possa fornire risultati più precisi rispetto ai criteri precedentemente esposti, è evidente che per definire un dominio resistente con contorno curvo è in generale necessario un numero di prove sperimentali maggiore rispetto al caso di contorno lineare.

Bisogna infine osservare che tutti i criteri che definiscono un dominio resistente nel piano di Mohr si basano sull'assunzione, solo parzialmente verificata, che la tensione principale intermedia sia influente ai fini della crisi. Per perfezionare le previsioni dei criteri sin qui esposti (tutt'ora ampiamente utilizzati nelle applicazioni) è quindi necessario considerare l'influenza sulla crisi di tutte le tensioni principali.

**CRITERIO DI VON MISES** Il criterio di Von Mises può considerarsi un perfezionamento del criterio di Tresca. Di questo criterio esistono diverse interpretazioni meccaniche, ciascuna ugualmente legittima poiché, in ogni caso, ai fini ingegneristici la sola giustificazione significativa di un criterio di resistenza è sperimentale. Lo scrivente ritiene interessante l'interpretazione secondo cui:

*In un punto di un materiale metallico duttile raggiunge lo snervamento quando il valore medio della tensione tangenziale su tutti gli elementi piani per il punto raggiunge un valore limite, caratteristico del materiale*

dove il valor “medio” della tensione tangenziale è definito come:

$$\tau_{medio} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \tau \cdot \tau d\Omega}$$

L'integrale è esteso a tutti gli elementi piani per il punto materiale in esame e è l'intero angolo solido, pari a  $4\pi$  steradiani.

Per poter calcolare questo valore si decompone la matrice di tensione nella sua parte *idrostatica* e nella sua parte *deviatorica*:

$$\begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_m & 0 & 0 \\ 0 & s_m & 0 \\ 0 & 0 & s_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_I^D & 0 & 0 \\ 0 & s_{II}^D & 0 \\ 0 & 0 & s_{III}^D \end{bmatrix}$$

$$s_m = \frac{s_I + s_{II} + s_{III}}{3}$$

$$s_i^D = s_i - s_m$$

in cui la parte deviatorica ha traccia nulla. Si può dimostrare che, in un generico stato di tensione risulta:

$$\begin{aligned}
& \tau_{medio} (s_I, s_{II}, s_{III}) \\
&= \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{(s_I^D)^2 + (s_{II}^D)^2 + (s_{III}^D)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{(s_I - s_{II})^2 + (s_I - s_{III})^2 + (s_{II} - s_{III})^2}
\end{aligned}$$

Affinché quindi in uno stato di tensione generico non si realizzi lo snervamento, la tensione tangenziale media deve essere inferiore a quella che si realizza in una prova monoassiale all'atto dello snervamento, cioè:

$$\tau_{medio} (s_I, s_{II}, s_{III}) < \tau_{medio} (f_y, 0, 0)$$

da cui si deduce:

$$\frac{\sqrt{(s_I - s_{II})^2 + (s_I - s_{III})^2 + (s_{II} - s_{III})^2}}{\sqrt{2}} < f_y$$

ed esprimendo le tensioni in un riferimento cartesiano generico:

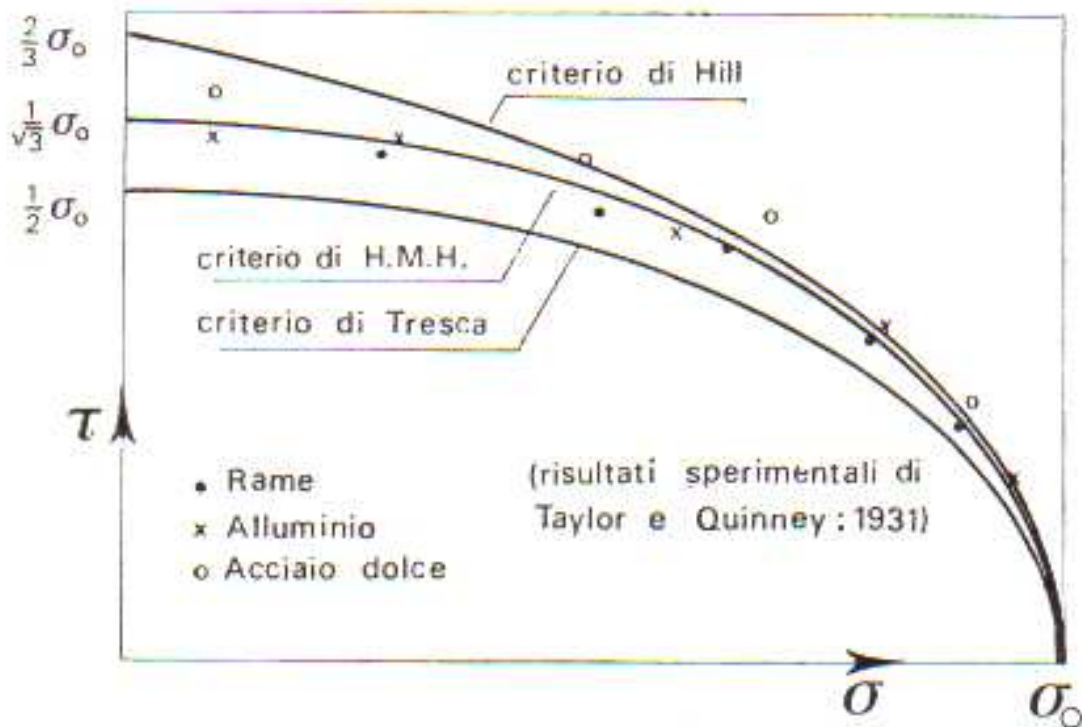
$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2} < f_y$$

E' interessante confrontare i criteri di resistenza di Tresca e di Von Mises nel caso più particolare di stato di tensione all'interno di una trave dove, ad una opportuna distanza da vincoli o carichi concentrati, sono presenti le sole tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$  e la sola tensione normale  $\sigma_z$ , in direzione assiale. In questo caso, confrontando le due verifiche di resistenza, si ha:

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq f_y \quad VM$$

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4(\tau_{zx}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq f_y \quad Tresca$$

La figura che segue mostra alcuni risultati sperimentali relativi a questi particolari stati di tensione:



N.B.: la curva relativa al criterio di VM è indicata con H.M.H. (Huber-Mises-Hencky), la tensione  $f_y$  con  $\sigma_0$ .