APPUNTI

DI

ANALISI DELLA TENSIONE

Prof. ing. Francesco Trentadue

FORZE ESTERNE ED INTERNE

Le forze agenti su un corpo solido si distinguono in *forze esterne* e *forze interne*.

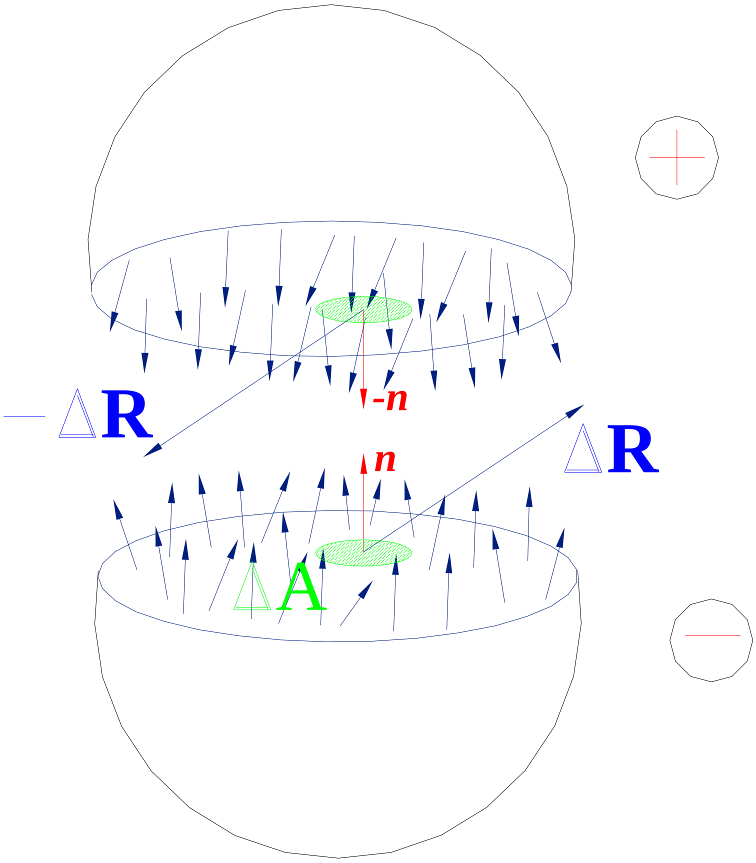
Le *forze esterne* descrivono l'interazione tra il corpo e l'ambiente esterno. Esse si suddividono in:

- *Forze di superficie*, applicate sulla superficie esterna. Esempi sono la pressione esercitata da un fluido o le forze che si generano a seguito del contatto con un altro corpo solido.
- *Forze di volume*, applicate nei punti materiali interni a causa dell'interazione con l'ambiente esterno. Sono forze esterne di volume la forza gravitazionale e le forze inerziali.

Le forze di superficie esterne si assegnano specificando la loro densità superficiale, le forze di volume specificando la loro densità volumetrica.

Le *forze interne* descrivono l'interazione fra le varie parti di un corpo. La loro modellazione si basa sui postulati di Eulero-Cauchy, qui di seguito esposti:

- Se si divide *idealmente* un corpo in due parti complementari + e - mediante una superficie arbitraria, l'interazione tra le due parti è rappresentabile da un sistema di forze interne, agenti sulla superficie di separazione ideale, distribuite in modo continuo.



- Esiste finito il limite:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{R}}{dA} = \mathbf{t}_n$$

Il vettore $\mathbf{t}_\mathbf{n}$, chiamato ***vettore tensione*** o ***vettore di sforzo***, dipende solo dal punto materiale che identifica la posizione dell'areola *dA* e dal versore ***n*** che ne identifica la giacitura, ma non dipende della superficie ideale di separazione scelta.

Anche per le tensioni sussiste il **Principio di azione e reazione,** che afferma che *le forze che le parti complementari* + *e* - *si scambiano localmente sono uguali e contrarie*. Perciò deve risultare:

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{t}_\mathbf{n}$$

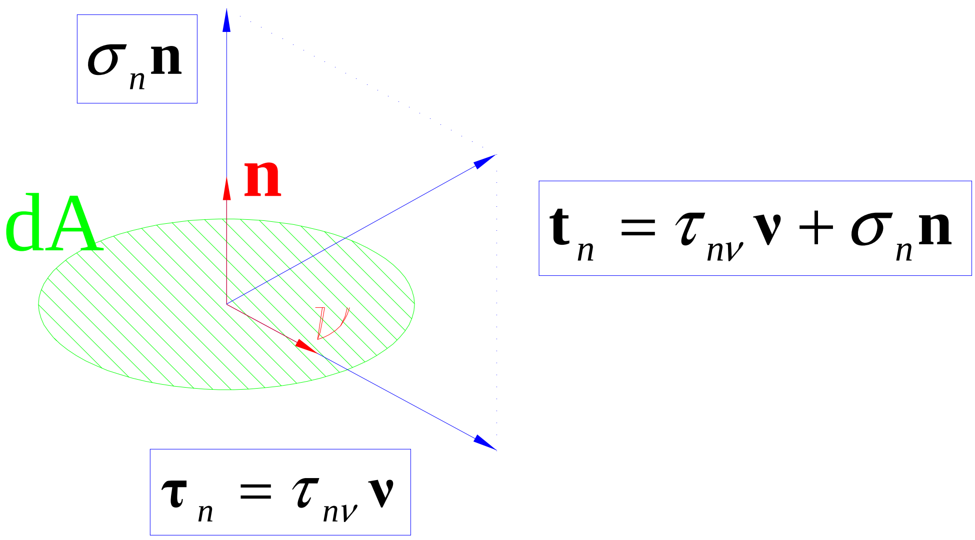
ASSIOMA DI EULERO

Una volta accettato che l'interazione fra le parti di un corpo è rappresentabile attraverso delle forze interne di superficie *(tensioni)*, se si isola *idealmente* una parte arbitraria + di un corpo e si rappresenta l'azione della sua parte complementare - su di essa mediante le *tensioni* che questa applica, è naturale richiedere che la parte + sia in equilibrio. L'assioma di Eulero stabilisce quindi che *le forze interne ed esterne in un corpo sono in equilibrio se e soltanto se ogni parte del corpo è in equilibrio*.

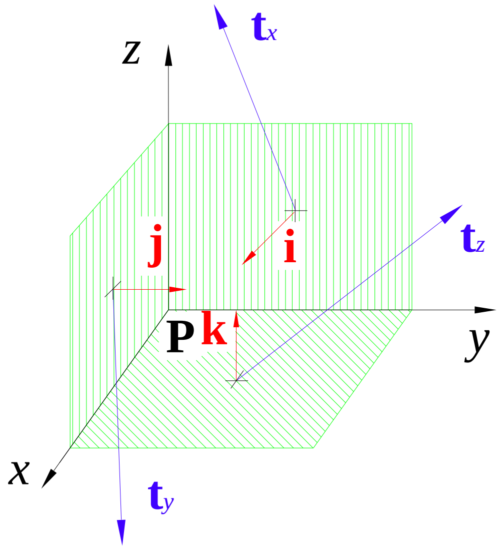
Se la parte scelta è il corpo intero si ottengono le leggi cardinali della statica, che considerano l'equilibrio delle sole forze esterne.

COMPONENTI DI TENSIONE

<u>*Componenti normale e tangenziale del vettore tensione.*</u> Il vettore $\mathbf{t}_\mathbf{n}$ può essere decomposto nella sua componente σ_n, normale all'elemento piano infinitesimo su cui è applicato e nella sua componente $\tau_{n\nu}$, tangente allo stesso elemento piano:



<u>*Componenti cartesiane della tensione.*</u> Assegnato un punto materiale **P** e fissato un riferimento cartesiano**,** è utile considerare i tre elementi piani infinitesimi di normali **i**, **j** e **k**, paralleli ai piani coordinati del riferimento assegnato. I tre vettori tensione agenti su questa terna di elementi piani vengono chiamati $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ e $\mathbf{t}_z$. Le loro componenti sugli assi cartesiani sono dette *componenti cartesiane della tensione*.



$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{t}_x &= \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k}\\ \mathbf{t}_y &= \tau_{yx}\mathbf{i} + \sigma_y\mathbf{j} + \tau_{yz}\mathbf{k}\\ \mathbf{t}_z &= \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k}\end{aligned}}$$

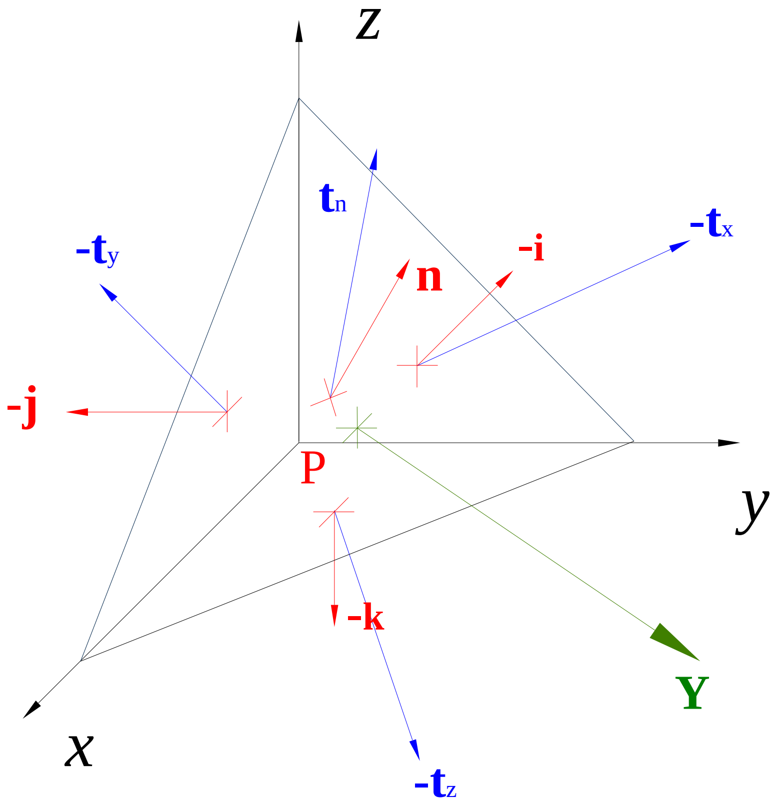
.

TEOREMA DI CAUCHY

L'assioma di Eulero definisce in modo completo le leggi di equilibrio a cui devono sottostare le forze esterne ed interne agenti in un corpo solido, ma la sua formulazione diretta non è in generale utilizzabile per sviluppare dei modelli che permettano di prevedere il comportamento meccanico dei corpi (solidi o fluidi).

Tale inconveniente è superato dal teorema di Cauchy. Sotto opportune ipotesi di regolarità, le proposizioni di questo teorema sono totalmente equivalenti all'assioma di Eulero, ma a differenza di quest'ultimo forniscono delle condizioni di equilibrio in forma *locale*, riferite cioè a parti infinitesime di un corpo. Qui di seguito si dimostrano le tre proposizioni di cui si compone questo teorema:

PROPOSIZIONE I. Si considera l'equilibrio alla traslazione di un tetraedro elementare all'interno di un corpo, avente vertice in un punto materiale **P** dove:



- **n** è versore normale all'elemento piano *dA* ;

- $\mathbf{t_n}$ è il vettore tensione agente sul piano *dA* di normale ***n*** ;

- gli elementi piani dA_x , dA_y, dA_z hanno versori esterni $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$;

- per il Principio di Azione e Reazione su gli elementi piani dA_x , dA_y, dA_z agiscono i vettori tensione:

$$\mathbf{t}_{-\mathbf{x}} = -\mathbf{t}_\mathbf{x} \qquad \mathbf{t}_{-\mathbf{y}} = -\mathbf{t}_\mathbf{y} \qquad \mathbf{t}_{-\mathbf{z}} = -\mathbf{t}_\mathbf{z}\,.$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione:

$$\mathbf{t}_n dA - \mathbf{t}_x dA_x - \mathbf{t}_y dA_y - \mathbf{t}_z dA_z + \mathbf{Y} dV = 0\,,$$

e ricordando le relazioni geometriche:

$$dA_x = dA\, n_x$$
$$dA_y = dA\, n_y$$
$$dA_z = dA\, n_z\,,$$

si ottiene la prima proposizione del Teorema di Cauchy:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z$$

che può anche scriversi nella forma:

$$\begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} n_x + \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} n_y + \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} n_z$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

e quindi:

$$\{\mathbf{t}_n\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{n}\},$$

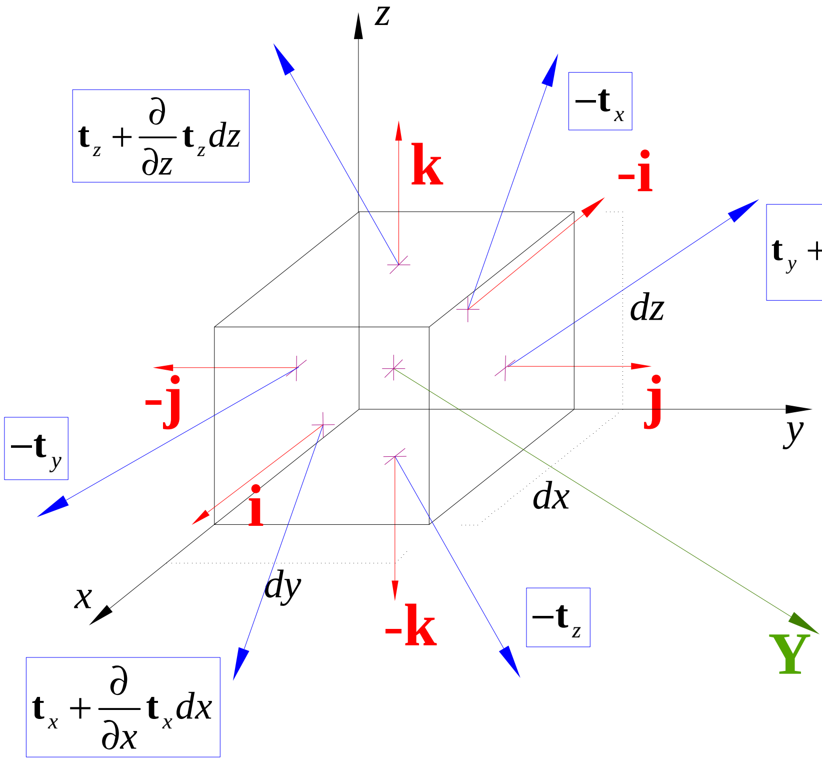
dove la matrice [**T**] è la matrice di tensione o di Cauchy.

Equazione d'equilibrio della superficie libera. Se l'elemento piano di normale ***n*** appartiene alla superficie esterna del corpo, deve dalla precedente relazione si deduce:

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{n}\},$$

dove ***p*** è la forza esterna di superficie agente sull'elemento piano di normale ***n***. L'ultima relazione è chiamata *equazione d'equilibrio della superficie libera*.

PROPOSIZIONE II. EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE. Si impone l'equilibrio alla traslazione del parallelepipedo elementare mostrato in Figura, valutando tutti i contributi delle forze interne ed esterne all'equilibrio:



Consideriamo dapprima le forze elementari interne che agiscono sugli elementi di normale esterna ***i*** e ***-i*** :

- Il vettore tensione $\mathbf{t}_x + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{t}_x dx$ che agisce sull'elemento di normale esterna ***i*** differisce di una quantità infinitesima dal vettore $\mathbf{t}_x$, poiché è applicato su un elemento piano che dista una quantità infinitesima dx dal piano di normale esterna ***i*** passante per **P.** Risulta quindi:

$$\mathbf{t}_x + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{t}_x dx = \mathbf{t}_x + \mathbf{t}_{x,x} dx$$

$$= \left(\sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz}\mathbf{k}\right) dx$$

$$= \left(\sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k}\right) + \left(\sigma_{x,x}\mathbf{i} + \tau_{xy,x}\mathbf{j} + \tau_{xz,x}\mathbf{k}\right) dx$$

- Sull'elemento piano passante per **P** e di normale esterna –***i*** agisce il vettore tensione $-\mathbf{t}_x$, per il principio di azione e reazione uguale e contrario a $\mathbf{t}_x$.

- Poiché la forza elementare che compete ad un vettore tensione si ottiene moltiplicando questo per l'area dell'elemento piano su cui agisce, il contributo all'equilibrio alla traslazione dei due vettori tensione $\mathbf{t}_x + \mathbf{t}_{x,x}dx$ e $-\mathbf{t}_x$ è:

$$\left(\mathbf{t}_x + \mathbf{t}_{x,x}dx - \mathbf{t}_x\right)dydz = \mathbf{t}_{x,x}dxdydz$$
$$= \left(\sigma_{x,x}\mathbf{i} + \tau_{xy,x}\mathbf{j} + \tau_{xz,x}\mathbf{k}\right)dxdydz \quad .$$

- In modo analogo si determinano i contributi delle forze elementari sugli elementi piani di normale esterna j, – j, k - k , che risultano pari a:

$$\left(\mathbf{t}_{y,y}dy\right)dxdz \, ,$$

$$\left(\mathbf{t}_{z,z}dz\right)dxdy \, .$$

All'elemento infinitesimo è applicata inoltre una forza esterna di volume $\mathbf{Y}dxdydz$, per cui considerando tutti i contributi all'equilibrio alla traslazione si ottiene l'equazione:

$$\mathbf{t}_{x,x}dxdydz + \mathbf{t}_{y,y}dydxdz + \mathbf{t}_{z,z}dzdxdy + \mathbf{Y}dxdydz = \mathbf{0} \, ,$$

da cui si deduce l'*equazione indefinita di equilibrio alla traslazione:*

$$\mathbf{t}_{x,x} + \mathbf{t}_{y,y} + \mathbf{t}_{z,z} + \mathbf{Y} = \mathbf{0} \, .$$

Questa in componenti si scrive:

$$\left(\sigma_x\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k}\right)_{,x} + \left(\tau_{yx}\mathbf{i} + \sigma_y\mathbf{j} + \tau_{yz}\mathbf{k}\right)_{,y} + \left(\tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k}\right)_{,z} + \left(Y_x\mathbf{i} + Y_y\mathbf{j} + Y_z\mathbf{k}\right) = \mathbf{0} \, ,$$

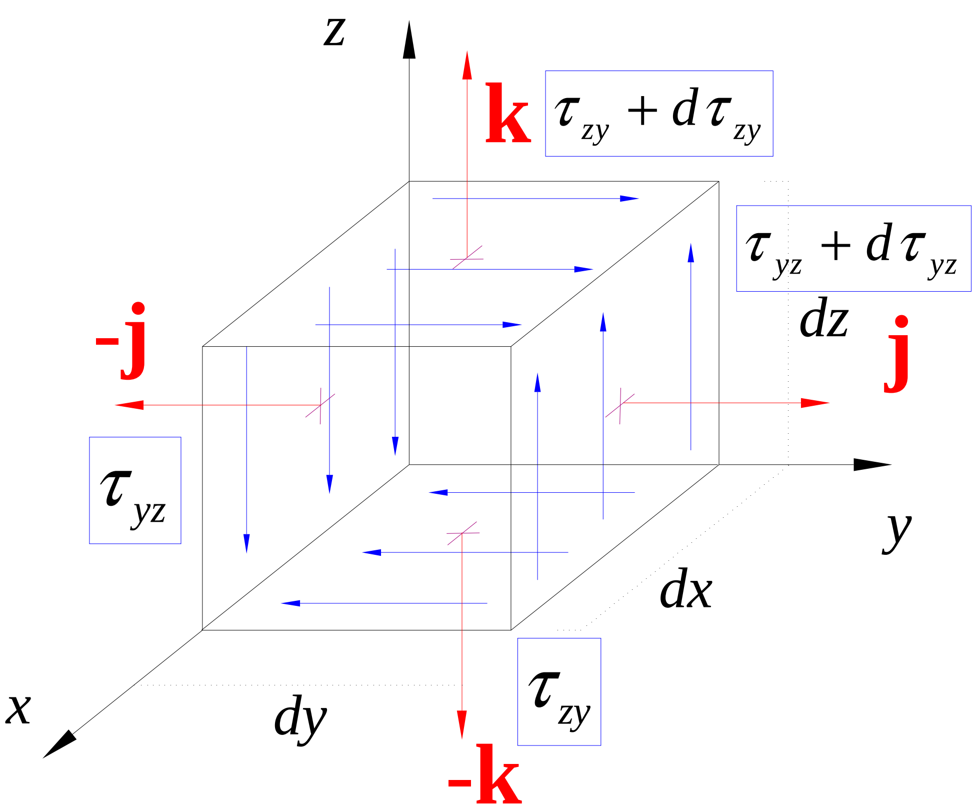
da cui si ottengono le tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + Y_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + Y_y = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + Y_z = 0 \end{cases}$$

Esiste infine un'ulteriore forma, detta *tensoriale*, per esprimere la stessa equazione:

$$div(\mathbf{T}) + \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

<u>*III PROPOSIZIONE. EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE.*</u> Si considera l'equilibrio alla rotazione del parallelepipedo elementare in figura, dove per semplicità sono state considerate le sole forze che determinano l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse x. Le forze non rappresentate producono contributi infinitesimi di ordine superiore o nulli.



Imponendo quest'equilibrio alla rotazione e trascurando infinitesimi di ordine superiore al terzo, si ottiene:

$$\tau_{yz}(dzdx)dy = \tau_{zy}(dydx)dz\ ,$$

da cui:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}\ .$$

In modo analogo, imponendo l’equilibrio alla rotazione intorno agli altri due assi coordinati si ottengono le altre due relazioni:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ,$$

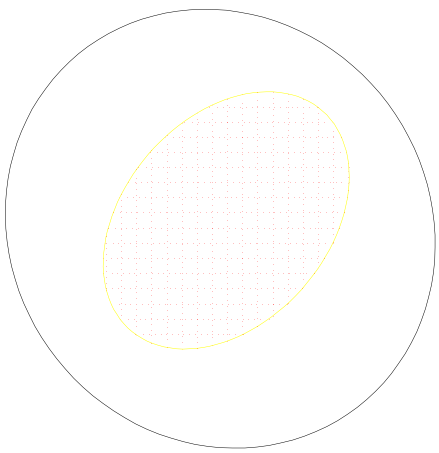
Le tre relazioni scalari precedenti, possono riassumersi nell’unica equazione matriciale:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^T ,$$

che stabilisce che la matrice di tensione è simmetrica.

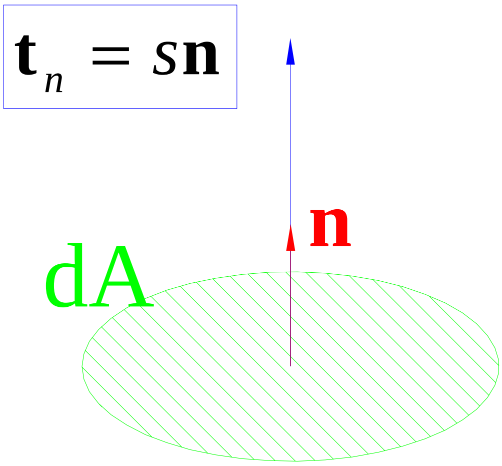
EQUIVALENZA TRA ASSIOMA DI EULERO E TEOREMA DI CAUCHY. In queste dispense le proposizioni del teorema di Cauchy sono state dedotte dall'assioma di Eulero imponendo l'equilibrio di opportune parti infinitesime (parallelepipedi e tetraedri elementari) di un corpo. Per affermare la totale equivalenza fra le proposizioni del teorema di Cauchy e l'assioma di Eulero è però necessario poter anche dedurre dalle proposizioni del teorema di Cauchy, riferite a specifiche parti infinitesime, l'equilibrio di una qualsiasi parte finita di un corpo. Questo può farsi ripartendo la parte scelta in infiniti parallelepipedi e tetraedri elementari, quest'ultimi posti in corrispondenza della superficie della parte scelta. Per l'ipotesi di regolarità del campo tensionale, l'equilibrio della parte finita si deduce perciò dall'equilibrio delle parti infinitesime in cui essa è stata idealmente suddivisa.

Questo ragionamento, qui esposto in forma puramente qualitativa, è presentato in forma analitica rigorosa, facendo uso delle formule di Gauss-Green, nei trattati di Scienza delle Costruzioni.



TENSIONI PRINCIPALI

Assegnato un punto materiale **P** all'interno di un corpo, è sempre possibile determinare degli elementi piani infinitesimi per **P,** di versore normale ***n*,** tali che il vettore di sforzo $\boldsymbol{t}_{\text{n}}$ abbia componente tangenziale nulla, come rappresentato in Figura:



dove s è la componente normale del vettore tensione, in questo caso coincidente con il suo modulo.

Gli elementi piani su cui non agiscono tensioni tangenziali sono chiamati *elementi piani principali;* il modulo s del vettore tensione è chiamato *tensione principale;* le direzioni normali ai piani principali *direzioni principali*.

Gli elementi piani principali possono essere definiti in modo equivalente anche come elementi piani su cui agiscono solo tensioni normali di trazione o di compressione.

Un vettore tensione principale può quindi scriversi, in forma di vettore colonna, nel modo seguente:

$$\{\mathbf{t}_n\} = s\{\mathbf{n}\},$$

dove per il Teorema di Cauchy, deve risultare:

$$\{\mathbf{t}_n\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{n}\}.$$

Quindi dalle due relazioni precedenti si ottiene l'equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix},$$

dove la tensione principale *s* e le componenti di ***n*** sono incogniti e dove ***n*** è di modulo unitario:

$$n_x^{\,2} + n_y^{\,2} + n_z^{\,2} = 1.$$

L'equazione matriciale precedente costituisce un problema di autovalori ed autovettori e può anche essere formulata nel modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - s & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - s & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Come è noto, la condizione:

$$\det(\mathbf{T} - s\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \sigma_x - s & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - s & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - s \end{vmatrix} = 0$$

è necessaria e sufficiente affinché il precedente sistema di equazioni lineari ammetta una soluzione $(n_x,\ n_y,\ n_z)$ diversa dalla soluzione nulla. Sviluppando il determinante otteniamo l'equazione caratteristica (o di Laplace):

$$s^3 - i_1(\mathbf{T})s^2 + i_2(\mathbf{T})s - i_3(\mathbf{T}) = 0,$$

i cui coefficienti sono chiamati invariante lineare, quadratico e cubico dello stato di tensione e risultano pari a:

$$i_1(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$
i_2(\mathbf{T})=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{zx}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix},
$$

$$
i_3(\mathbf{T})=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}.
$$

Il temine invariante indica che il valore di queste quantità non dipende dall'orientamento del riferimento cartesiano. Sussistono le seguenti proprietà:

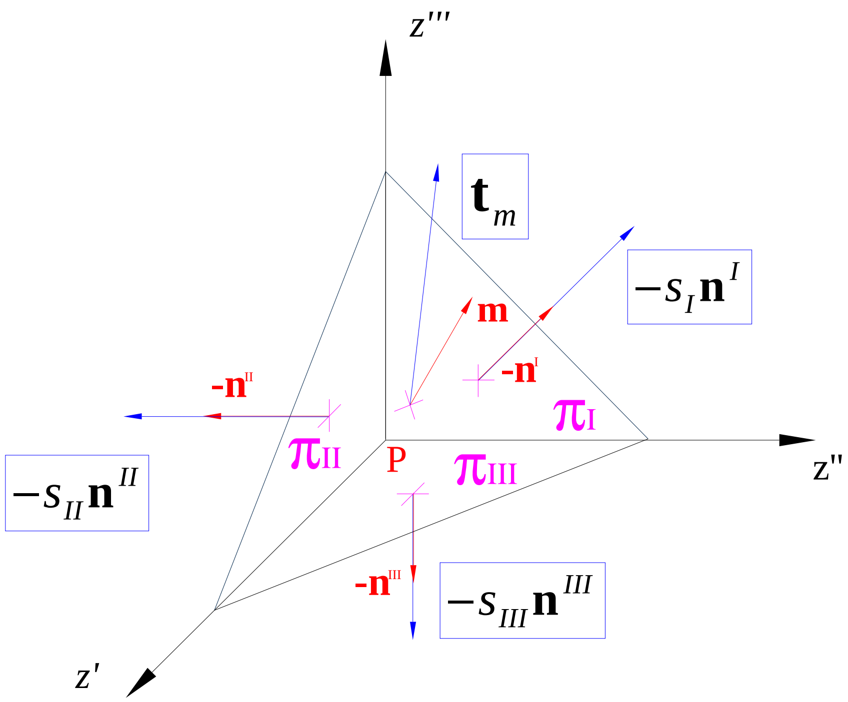
- Poiché la matrice di tensione $[\mathbf{T}]$ è simmetrica (in conseguenza dell'equazione di equilibrio indefinita di equilibrio alla rotazione), l'equazione caratteristica ammette sempre soluzioni reali, chiamate tensioni principali, che indicheremo con i simboli s_I , s_{II} ed s_{III}.

- A questa terna di tensioni principali è sempre possibile associare almeno una terna di direzioni principali ortogonali, i cui versori sono gli autovettori (di modulo unitario) soluzione del problema posto. Questi saranno indicati con i simboli $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$ e gli assi principali aventi versori $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$ saranno chiamati z^I, z^{II}, z^{III} .

MATRICE DI TENSIONE NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE. Come è stato già dimostrato, assegnata per un punto **P** una generica terna di elementi piani ortogonali ed un elemento piano di normale **m**, la prima proposizione del teorema di Cauchy si scrive:

$$\mathbf{t}_m = \mathbf{t}_x m_x + \mathbf{t}_y m_y + \mathbf{t}_z m_z$$
$$= \mathbf{t}_x (\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}) + \mathbf{t}_y (\mathbf{m} \cdot \mathbf{j}) + \mathbf{t}_z (\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) \cdot$$

Se la terna di elementi piani ortogonali è la terna principale, la relazione precedente diventa:



$$\mathbf{t}_m = s_I \mathbf{n}^I (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^I) + s_{II} \mathbf{n}^{II} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{II}) + s_{III} \mathbf{n}^{III} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{III})$$
$$= s_I \mathbf{n}^I m_I + s_{II} \mathbf{n}^{II} m_{II} + s_{III} \mathbf{n}^{III} m_{III} \quad ,$$

Esprimendo le componenti dei vettori nel riferimento principale, si può scrivere la proposizione precedente in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} t_{mI} \\ t_{mII} \\ t_{mIII} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} m_I + \begin{Bmatrix} 0 \\ s_{II} \\ 0 \end{Bmatrix} m_{II} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{III} \end{Bmatrix} m_{III}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_{mI} \\ t_{mII} \\ t_{mIII} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_I \\ m_{II} \\ m_{III} \end{Bmatrix}$$

Deduciamo quindi che:

- La matrice di tensione espressa nel riferimento principale è sempre diagonale.

- Poiché gli invarianti di tensione non dipendono dal riferimento scelto, risulta:

$$i_1(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = s_I + s_{II} + s_{III}\ ,$$

$$i_2(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = s_I s_{II} + s_I s_{III} + s_{II} s_{III}\ ,$$

$$i_3(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = s_I s_{II} s_{III}\ .$$

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI TENSIONALI

Si stabilisce la seguente classificazione:

- Se una sola tensione principale è diversa da zero lo stato di tensione si dirà *monoassiale.*
- Se due tensioni principali sono diverse da zero lo stato di tensione si dirà *biassiale.*
- Se tutte le tensioni principali sono diverse da zero lo stato di tensione si dirà *triassale.*

STATI DI TENSIONE MONOASSIALI. Supponiamo che la sola tensione principale s_I sia diversa da zero e che quindi risulti $s_{II} = s_{III} = 0$. Notiamo che solo l'invariante lineare di tensione è diverso da zero. Dal Teorema di Cauchy otteniamo:

$$\mathbf{t}_m = s_I \mathbf{n}^I \left(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^I \right) = s_I \mathbf{n}^I m_I \ ,$$

da cui si deduce:

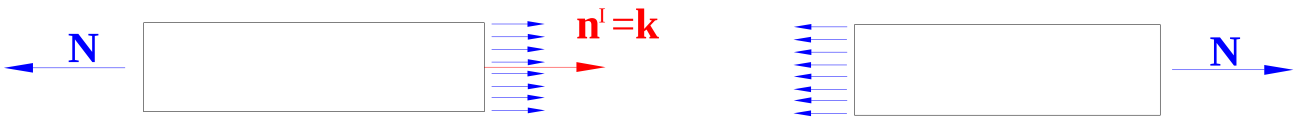
- Su qualunque elemento piano di normale ***m*** il vettore tensione $\boldsymbol{t}_m$ è sempre parallelo alla direzione principale $\boldsymbol{n}^I$.
- Su tutti i piani per cui risulta $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^I = 0$, cioè paralleli alla direzione principale z^I, il vettore tensione è nullo, quindi essi sono tutti piani principali scarichi.
- La matrice di Cauchy espressa in un riferimento principale assume la forma:

$$\begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

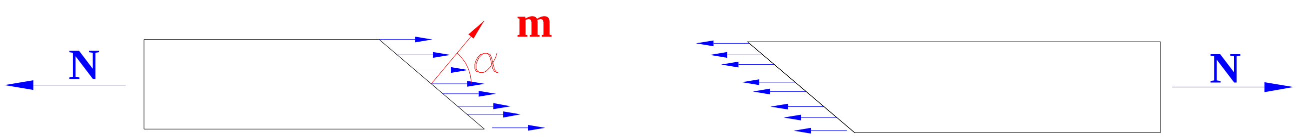
Un caso notevole in cui in un corpo solido si sviluppa uno stato di tensione monoassiale è quello relativo ad un'asta soggetta a sforzo normale.

In particolare, sotto ipotesi abbastanza generali che verranno chiarite in questo corso ed in quelli successivi, si dimostra che in un'asta soggetta a sforzo normale, ad un'opportuna distanza dalle basi, si sviluppa uno stato di tensione monoassiale il cui asse coincide con l'asse dell'asta:

$$\boxed{\mathbf{t}_z = \sigma_z \mathbf{k} = s_I \mathbf{n}^I}$$



$$\boxed{\mathbf{t}_m = s_I \left(\mathbf{n}^I \cdot \mathbf{m}\right)\mathbf{n}^I = \sigma_z \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}\right)\mathbf{k} = \sigma_z \cos\left(\alpha\right)\mathbf{k}}$$



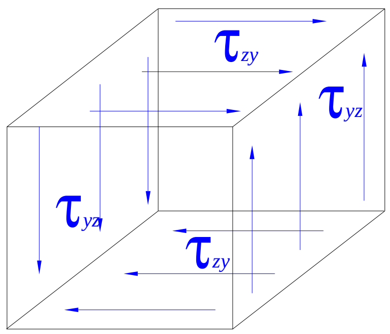
STATI DI TENSIONE BIASSIALI. Supponiamo che le due tensioni principali diverse da zero siano s_I ed s_{II} e che quindi risulti $s_{III} = 0$. Notiamo che l'invariante quadratico deve essere diverso da zero, mentre l'invariante cubico deve essere nullo. Dalla prima proposizione del Teorema di Cauchy otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_m &= s_I \mathbf{n}^I \left(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^I\right) + s_{II} \mathbf{n}^{II} \left(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{II}\right) \\
&= s_I \mathbf{n}^I m_I + s_{II} \mathbf{n}^{II} m_{II}
\end{aligned}
$$

Quindi:

- Su qualunque elemento piano di normale $\boldsymbol{m}$ il vettore tensione $\boldsymbol{t}_m$ è parallelo al piano di assi z^I e z^{II}, che viene detto *piano della tensione*.
- Se $\mathbf{m} = \mathbf{n}^{III}$ il vettore tensione $\boldsymbol{t}_m$ è nullo, per cui il piano della tensione è anche il piano principale *scarico*, con tensione principale nulla $s_{III} = 0$.

Uno stato biassiale notevole è quello di taglio puro, in cui un elemento piano coordinato è scarico mentre gli altri due sono soggetti a sole tensioni tangenziali:



$$
[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}
$$

Nel caso in figura il piano coordinato scarico, che è anche piano principale, è il piano di normale x, quindi, su qualunque elemento piano per il punto materiale in esame il vettore tensione sarà parallelo al piano di normale x.

Imponendo il problema di autovalori per la ricerca delle tensioni e direzioni principali otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & -s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Gli invarianti lineare, quadratico e cubico risultano pari a:

$$i_1(\mathbf{T}) = 0$$

$$i_2(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & 0 \end{vmatrix} = -\tau_{zy}{}^2$$

$$i_3(\mathbf{T}) = 0$$

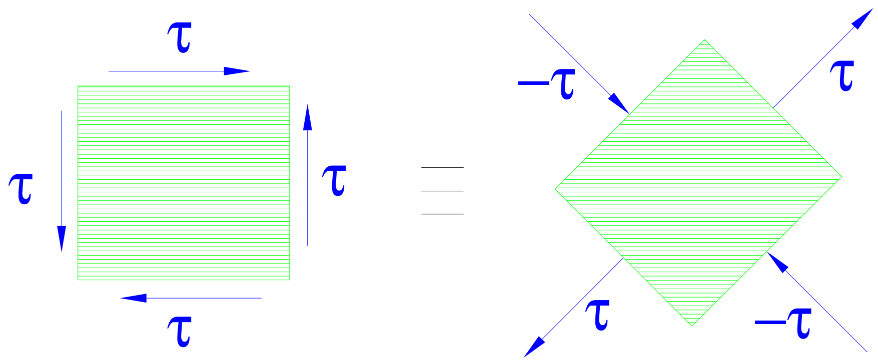
e l’equazione di Laplace diventa:

$$s^3 - \tau_{zy}{}^2 s = s\left(s^2 - \tau_{zy}{}^2\right) = 0\,,$$

da cui, infine, si ottiene:

$$s_I = \tau \quad \{\mathbf{n}^I\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad s_{II} = -\tau \quad \{\mathbf{n}^{II}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad s_{III} = 0 \quad \{\mathbf{n}^{III}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Quindi uno stato di taglio puro è equivalente alla sovrapposizione di uno stato monoassiale di trazione e uno di compressione di uguale entità, con assi inclinati di 45° rispetto ai piani su cui agiscono le tensioni tangenziali:



Per cercare di chiarire il significato fisico degli stati di taglio puro, si può osservare che gli sforzi di taglio indotti nei pannelli murari da un’azione sismica inducono tipiche lesioni inclinate a circa 45°, secondo le giaciture dei piani principali soggetti a sforzi di trazione.

N.B.: Nel caso in esame, nel pannello raffigurato non hanno agito solo sforzi di taglio, ma anche sforzi di compressione verticali.

STATI DI TENSIONE TRIASSIALI. Gli stati di tensione triassiali costituiscono il caso generale in cui le tre tensioni principali sono tutte non nulle. Il vettore tensione su un generico elemento piano può in questo caso può avere direzione qualsiasi.

Osserviamo che, poiché risulta:

$$\begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{bmatrix},$$

ogni stato triassiale di tensione può sempre pensarsi come sovrapposizione di tre stati monoassiali con assi ortogonali.

Uno stato triassiale notevole, che si realizza nei fluidi in quiete, è quello *idrostatico*, in cui le tre tensioni principali sono uguali e sono pari, a meno del segno, alla pressione idrostatica *p*, così come definita dalla meccanica dei fluidi:

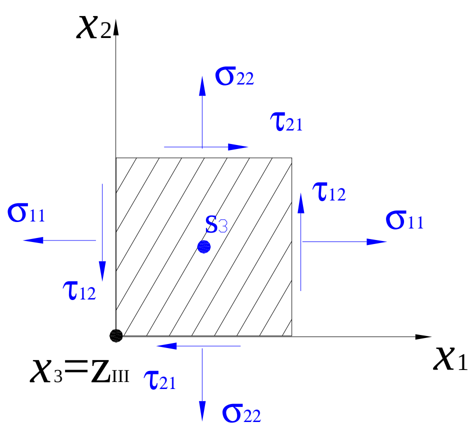
$$\begin{aligned} \mathbf{t}_m &= s\mathbf{n}^I\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}^I\right) + s\mathbf{n}^{II}\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}^{II}\right) + s\mathbf{n}^{III}\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}^{III}\right) \\ &= s\left(\mathbf{n}^I m_I + \mathbf{n}^{II} m_{II} + \mathbf{n}^{III} m_{III}\right) \\ &= s\mathbf{m} = -p\mathbf{m} \end{aligned}$$

In questo caso quindi un qualsiasi elemento piano è un piano principale e, assegnato un riferimento cartesiano qualsiasi, la matrice di tensione assume la forma:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLO STATO DI TENSIONE.

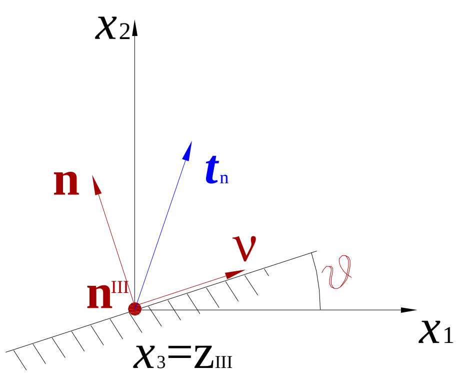
CERCHIO DI MOHR. Consideriamo una generica terna d'assi $Px_1x_2x_3$ avente origine in un punto materiale P, dove l'asse Px_3 sia un asse principale a cui associamo la tensione principale $s_3 = s_{III}$ e consideriamo l'elemento di materiale rappresentato in Figura.



Poiché l'elemento piano normale all'asse Px_3 è principale, su di esso agisce solo la tensione normale s_3, mentre le tensioni tangenziali τ_{31} e τ_{32} sono nulle. Nel riferimento scelto la matrice di tensione assume quindi la forma particolare:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{21} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

La terna d'assi cartesiani $Px_1x_2x_3$ è distinta in generale dalla terna globale Pxyz. Proponiamoci di determinare come varia il vettore di sforzo $\boldsymbol{t_n}$ sugli elementi piani del fascio che ha per sostegno l'asse principale $x_3 = z^{III}$, così come mostrato in Figura. In particolare, poiché esiste sempre almeno una terna ortogonale di elementi piani principali, almeno due elementi piani del fascio devono essere principali.



Si noti che il vettore di sforzo è noto sul piano orizzontale, dove risulta $\mathbf{t_n} = \mathbf{t}_{x_2}$, e sul piano verticale, dove risulta $\mathbf{t_n} = \mathbf{t}_{x_1}$.

Consideriamo ora i versori normale e tangente all'elemento piano $\boldsymbol{n}$ e ν, di componenti:

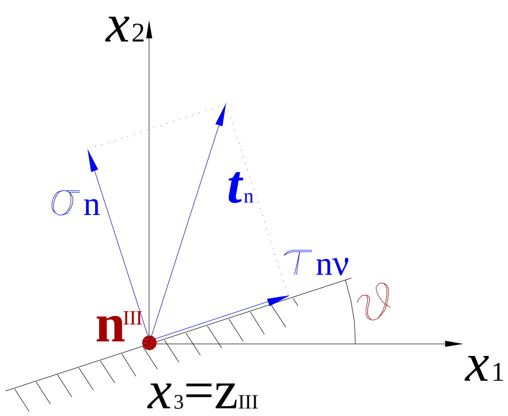
$$\{\mathbf{v}\}=\begin{Bmatrix}\cos\vartheta\\ sen\vartheta\\ 0\end{Bmatrix}\qquad\{\mathbf{n}\}=\begin{Bmatrix}-sen\vartheta\\ \cos\vartheta\\ 0\end{Bmatrix},$$

dove ν è orientato in modo tale che la coppia di versori $\boldsymbol{n}$ e ν sia oraria.

Applicando il teorema di Cauchy determiniamo le componenti cartesiane del vettore tensione $\boldsymbol{t_n}$:

$$\begin{Bmatrix}t_{n1}\\ t_{n2}\\ t_{n3}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \tau_{21} & 0\\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & s_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-sen\vartheta\\ \cos\vartheta\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sigma_1 sen\vartheta+\tau_{21}\cos\vartheta\\ -\tau_{12}sen\vartheta+\sigma_2\cos\vartheta\\ 0\end{Bmatrix}$$

e successivamente determiniamo le componenti normali e tangenziali $\boldsymbol{\sigma_n}$ e $\boldsymbol{\tau_{n\nu}}$ del vettore tensione $\boldsymbol{t_n}$:



$$\sigma_n=\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{n}=\{\mathbf{n}\}^T\{\mathbf{t}_n\}$$

$$=\{-sen\vartheta\quad\cos\vartheta\quad 0\}\begin{Bmatrix}-\sigma_1 sen\vartheta+\tau_{21}\cos\vartheta\\ -\tau_{12}sen\vartheta+\sigma_2\cos\vartheta\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$=\sigma_1 sen^2\vartheta-2\tau_{12}\cos\vartheta sen\vartheta+\sigma_2\cos^2\vartheta$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{n\nu} &= \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{t}_n\} \\
&= \{\cos\vartheta \quad sen\vartheta \quad 0\} \begin{Bmatrix} -\sigma_1 sen\vartheta + \tau_{21}\cos\vartheta \\ -\tau_{12} sen\vartheta + \sigma_2 \cos\vartheta \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\vartheta sen\vartheta + \tau_{12}\left(\cos^2\vartheta - sen^2\vartheta\right)
\end{aligned}
.
$$

Esprimiamo ora le due precedenti relazioni in funzione dell'angolo 2θ:

$$
\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_1\left(\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\right) - \tau_{12} sen2\vartheta + \sigma_2\left(\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\right) \\
&= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)\cos 2\vartheta - \tau_{12} sen2\vartheta
\end{aligned}
$$

$$
\tau_{n\nu} = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right) sen2\vartheta + \tau_{12}\cos 2\vartheta \, .
$$

Osserviamo inoltre che è sempre possibile scegliere due numeri reali R e γ tali che:

$$
\begin{cases} R sen2\gamma = \tau_{12} \\ R\cos 2\gamma = \dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2} \end{cases} ,
$$

dove R si determina elevando al quadrato e sommando le due precedenti equazioni:

$$
R^2 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_{12}{}^2 \quad \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_{12}{}^2} ,
$$

mentre γ si determina eseguendo il loro rapporto:

$$
tg 2\gamma = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_2-\sigma_1} .
$$

Poniamo infine:

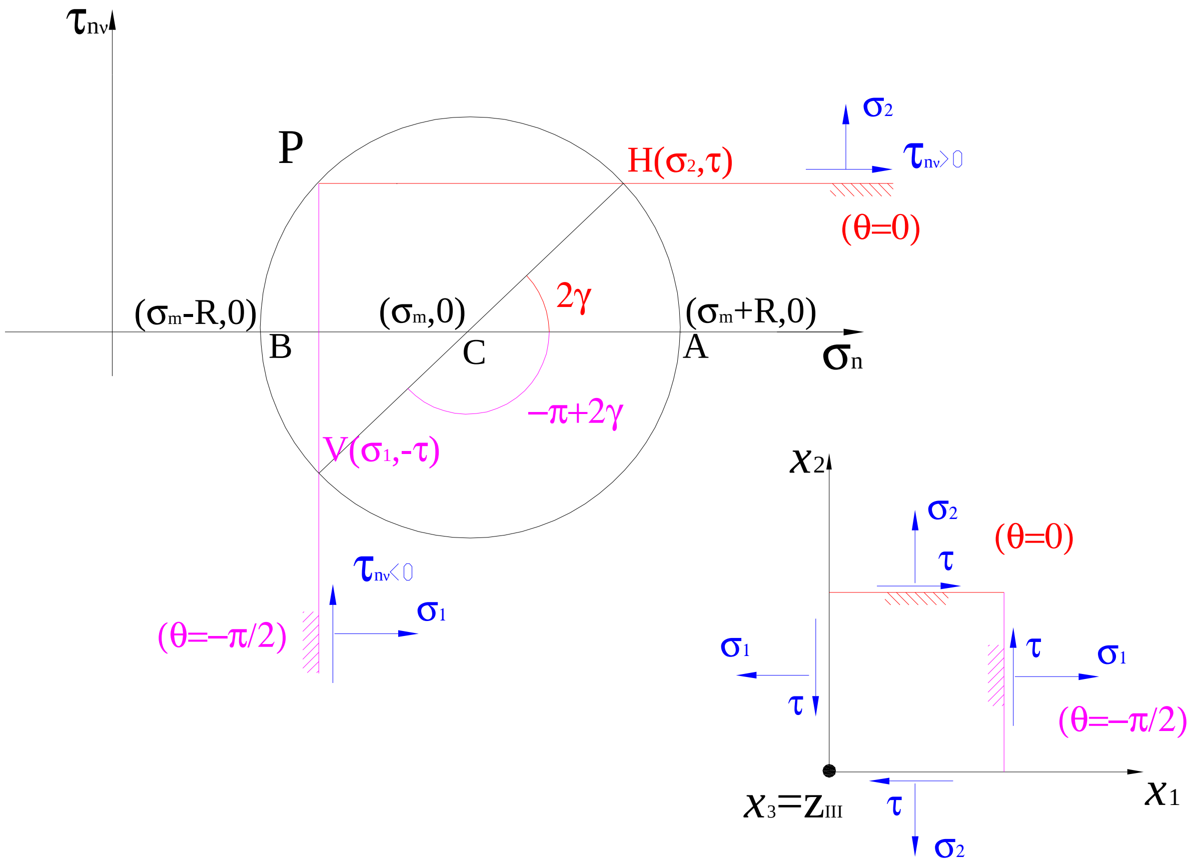
$$
\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}
$$

e otteniamo:

$$\sigma_n = \sigma_m + R\left(\cos 2\gamma \cos 2\theta - sen2\gamma sen2\vartheta\right)$$
$$= \sigma_m + R\cos\left(2\gamma + 2\vartheta\right)$$

$$\tau_{nv} = R\left(sen2\theta \cos 2\gamma + \cos 2\vartheta sen2\gamma\right)$$
$$= Rsen(2\gamma + 2\vartheta)$$

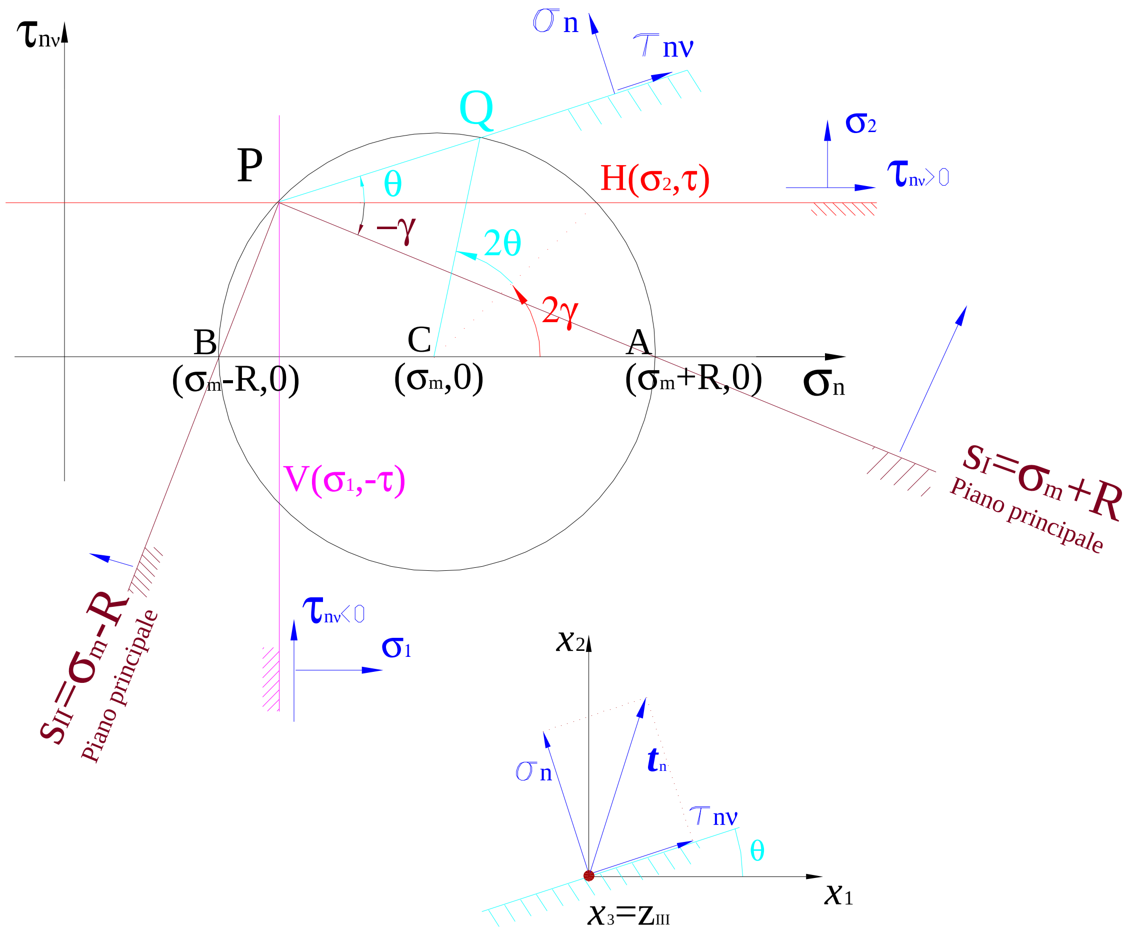
Riconosciamo ora che le due precedenti relazioni sono le equazioni parametriche di un cerchio in un piano cartesiano di assi σ_n e τ_{nv}, chiamato cerchio di Mohr.



Il cerchio di Mohr è univocamente individuato dal centro C, di coordinate (σ_m, 0), e dal raggio R, ma può anche essere determinato osservando che sono sempre noti i due punti H e V, diametralmente opposti nel cerchio:

- H ha per coordinate le componenti normale e tangenziale della tensione sull'elemento piano orizzontale (θ=0) e individua un angolo al centro, rispetto all'asse orizzontale, pari a 2γ;
- **V** ha per coordinate le componenti normale e tangenziale della tensione sull' elemento piano verticale (θ=-π/2) e individua un angolo al centro pari a $-\pi+2\gamma$.

Dalle relazioni prima ottenute che determinano le componenti normale σ_n e tangenziale $\tau_{n\nu}$ del vettore tensione, si osserva che le componenti normale e tangenziale della tensione su un generico elemento piano inclinato di ϑ rispetto all'orizzontale sono individuate dal punto $\mathbf{Q} \equiv (\sigma_n, \tau_{n\nu})$ sul cerchio che determina l'angolo al centro $Q\hat{C}A = 2\vartheta + 2\gamma$.

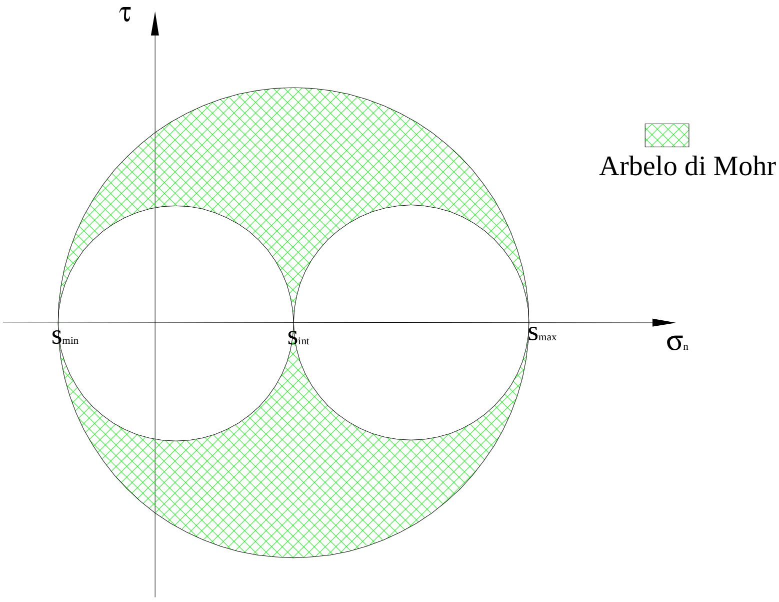


Se si intersecano la traccia del piano orizzontale mandata da **H** e la traccia del piano verticale mandata da **V** si ottiene un punto **P** appartenente al cerchio, detto ***polo*** della rappresentazione.

Dimostriamo ora che la congiungente il polo **P** con il punto **Q**, di coordinate σ_n e $\tau_{n\nu}$, forma un angolo ϑ rispetto all'orizzontale. Infatti per ipotesi il punto **Q** determina l'angolo al centro $Q\hat{C}H = 2\vartheta$ e quindi, per note proprietà di geometria Euclidea, l'angolo alla circonferenza $Q\hat{P}H$ vale ϑ. La proposizione è quindi dimostrata.

Questa proprietà del polo P ci permette di identificare immediatamente i due elementi piani principali appartenenti al fascio che ha per asse l'asse principale $x_3 = z^{III}$. Questi si ottengono congiungendo il polo P con i punti estremi A e B del diametro orizzontale, che rappresentano i due elementi piani su cui la tensione tangenziale è nulla.

<u>ARBELO DI MOHR.</u> Poiché possiamo sempre individuare almeno tre assi principali ortogonali per un punto materiale, è possibile sempre tracciare i tre cerchi di Mohr ad essi relativi e sovrapporli in un unico piano cartesiano. La regione del piano delimitata dai tre cerchi di Mohr così ottenuti è chiamata Arbelo di Mohr (area campita in verde nella Figura):



Si dimostra che il vettore di tensione agente su un generico elemento piano per un punto materiale è sempre individuato da un punto appartenente all'Arbelo di Mohr. Ne consegue che:

- il valore della componente normale di tensione su un generico elemento piano è sempre compreso tra la massima e la minima tensione principale:

$$s_{\min} \le \sigma_n \le s_{max}$$

- il valore massimo della tensione tangenziale su tutti gli infiniti elementi piani per il punto materiale in esame è pari a:

$$\tau_{\max} = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$