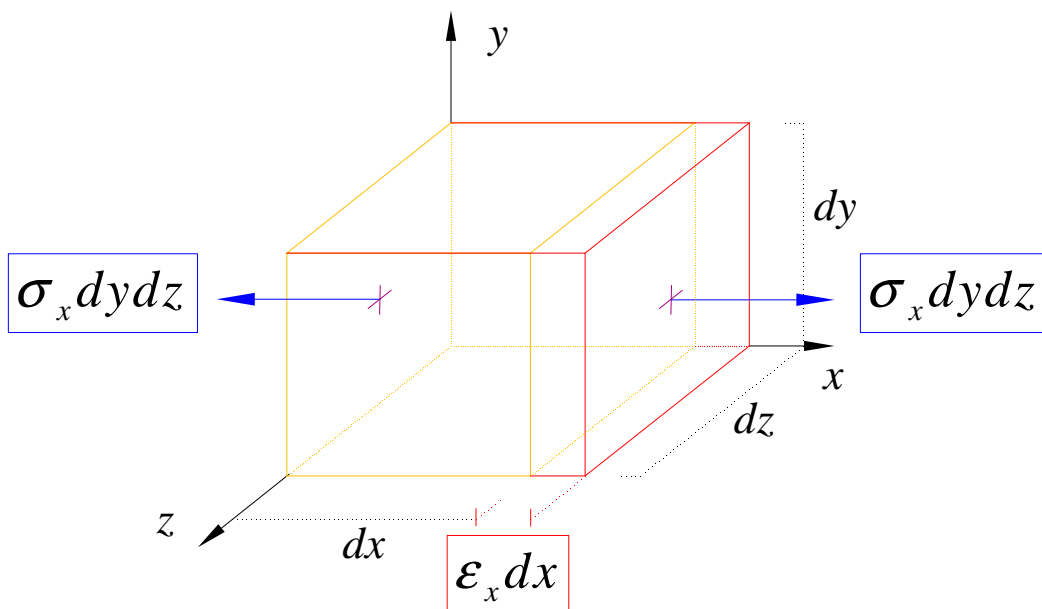


LAVORO VIRTUALE INTERNO Proponiamoci di determinare il *lavoro virtuale* prodotto da un sistema di tensioni equilibrato su un elemento infinitesimo di materiale soggetto ad uno spostamento generico, non necessariamente coincidente con quello fisicamente prodotto dalle tensioni. Per indicare questa circostanza useremo l'aggettivo *virtuale* per indicare il lavoro così calcolato.

Osserviamo che se il sistema di tensioni è in equilibrio (e quindi soddisfa le relazioni del teorema di Cauchy), per il Principio dei lavori virtuali nella sua formulazione relativa ai corpi rigidi esso compie un lavoro totale nullo per qualunque spostamento rigido virtuale.

Possiamo considerare quindi il lavoro delle tensioni applicate all'elemento di materiale per gli spostamenti dovuti alla sola deformazione pura. Inoltre è possibile calcolare questo lavoro come somma di contributi relativi alle deformazioni elementari corrispondenti agli elementi della matrice di deformazione. Calcoliamo quindi prima il lavoro prodotto in un estensione monoassiale secondo l'asse x , così come mostrato in Figura:



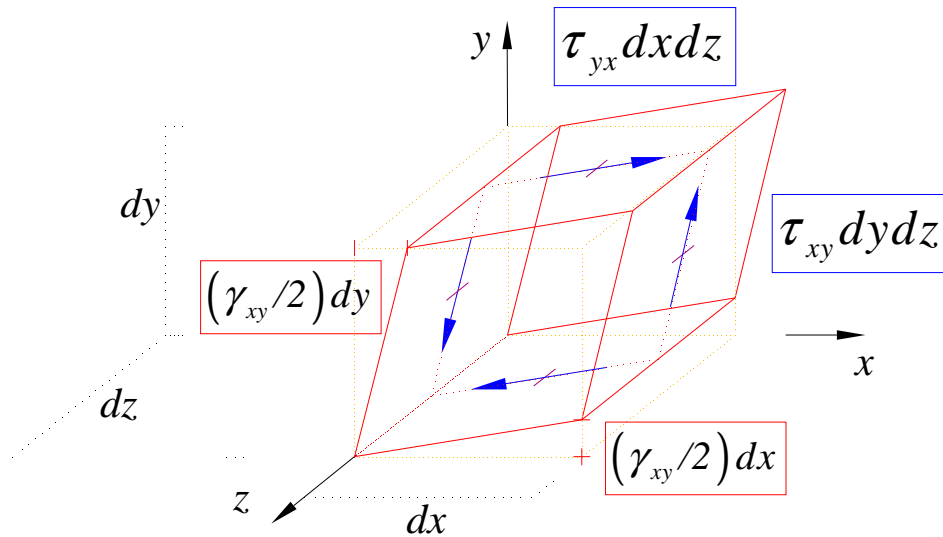
$$dL_x = \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \sigma_x \epsilon_x dV$$

Le uniche forze interne che compiono lavoro per questa particolare deformazione sono le forze $\sigma_x dydz$, i cui punti di applicazione subiscono lo spostamento relativo $\epsilon_x dx$. Il lavoro svolto è quindi pari a $\sigma_x dydz \cdot \epsilon_x dx = \sigma_x \epsilon_x dV$.

Considerando successivamente delle estensioni monoassiali secondo l'asse y e l'asse z , nello stesso modo otteniamo:

$$dL_y = \sigma_y \varepsilon_y dV \quad dL_z = \sigma_z \varepsilon_z dV$$

Consideriamo ora uno scorrimento puro secondo le direzioni x e y :



$$dL_{xy} = (\tau_{xy} dydz) \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} dx \right) + (\tau_{yx} dxdz) \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} dy \right)$$

$$= \tau_{xy} \gamma_{xy} dV$$

Le uniche forze che compiono lavoro per questa particolare deformazione sono le forze elementari $\tau_{yx} dxdz$, i cui punti di applicazione subiscono lo spostamento relativo $\gamma_{xy} dy/2$ e le forze elementari $\tau_{xy} dydz$, i cui punti di applicazione subiscono lo spostamento relativo $\gamma_{xy} dx/2$

Consideriamo successivamente degli scorrimenti secondo le altre due coppie di assi coordinati e nello stesso modo otteniamo:

$$dL_{xz} = \tau_{zx} \gamma_{zx} dV$$

$$dL_{yz} = \tau_{zy} \gamma_{zy} dV$$

In una deformazione generica, il lavoro virtuale è somma di tutti i termini prima calcolati e perciò si scrive:

$$\begin{aligned}
 dL &= \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yx} \gamma_{yx} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy} \right) dV \\
 &= \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yx} \cdot 2\varepsilon_{yx} + \tau_{zx} \cdot 2\varepsilon_{zx} + \tau_{zy} \cdot 2\varepsilon_{zy} \right) dV \\
 &= \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \left(\tau_{yx} \varepsilon_{yx} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \right) + \left(\tau_{zx} \varepsilon_{zx} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz} \right) + \left(\tau_{zy} \varepsilon_{zy} + \tau_{yz} \varepsilon_{yz} \right) \right] dV \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dV \\
 &= (\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}) dV
 \end{aligned}$$

dove il termine $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}$, denominato *prodotto interno della matrice (o tensore) di tensione per la matrice (o tensore) di deformazione*, si ottiene moltiplicando ogni elemento della matrice di tensione per il corrispondente elemento della matrice di deformazione e sommando tutti i prodotti così ottenuti.

Si noti che il prodotto interno delle matrici di tensione e deformazione esprime una grandezza fisica (*il lavoro interno per unità di volume*) indipendente dal sistema di riferimento ed è quindi invariante rispetto alla scelta dello stesso.

TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI Il Teorema dei lavori virtuali per i corpi deformabili può pensarsi come estensione dell'analogo principio già enunciato nel caso dei corpi rigidi. Il teorema stabilisce uno dei risultati centrali della meccanica dei solidi e delle strutture. Qui il teorema è enunciato per brevità con riferimento ad un corpo libero da vincoli.

Il teorema afferma che, assegnato un corpo costituito da materiale qualsiasi, comunque si consideri un sistema di forze esterne e interne equilibrato, che cioè soddisfi le proposizioni del teorema di Cauchy:

$$\mathbf{t}_{x,x} + \mathbf{t}_{y,y} + \mathbf{t}_{z,z} + \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad \text{in } V$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \text{in } V$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z \quad \text{su } S,$$

e comunque si consideri un sistema di spostamenti e deformazioni congruente, che soddisfi cioè la relazione:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T),$$

allora il lavoro virtuale svolto dalle forze esterne è identicamente pari al lavoro virtuale svolto dalle forze interne:

$$\int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV \equiv \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Nella forma qui enunciata il teorema dei lavori virtuali assume quindi come ipotesi *l'equilibrio delle forze interne ed esterne e la congruenza del sistema di spostamenti e deformazioni*. Da queste ipotesi deduce che *il lavoro virtuale esterno è identicamente pari al lavoro virtuale interno*.

Più in generale si può mostrare che una qualsiasi coppia delle tre proprietà :

- Equilibrio delle forze esterne ed interne
- Congruenza del sistema di spostamenti e deformazioni

- Identità tra lavoro virtuale esterno ed interno

implica la terza proprietà rimanente.

Si noti ancora che se si considera un corpo rigido, poiché la deformazione è ovunque nulla, il teorema afferma che:

$$\int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV \equiv 0$$

Quindi in questo caso il lavoro *virtuale* svolto dalle forze esterne è identicamente nullo. Quindi, le forze interne non compiono alcun lavoro virtuale in corrispondenza di uno spostamento rigido.

Dimostrazione (Facoltativa)

La dimostrazione del teorema si basa sulle formule di Gauss-Green, che permettono la trasformazione di un integrale di superficie in un integrale di volume. In particolare, se $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare della variabile x si ha:

$$\int_S f(x) n_x dS = \int_V f_{,x}(x) dV$$

dove n_x è la componente secondo l'asse x della normale esterna alla superficie S che delimita il dominio di volume V .

Consideriamo ora l'espressione del lavoro virtuale esterno:

$$L_e = \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV$$

Per l'equazione di equilibrio sulla superficie libera del corpo si ha:

$$L_e = \int_S \left(\mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z \right) \cdot \mathbf{v} ds + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV$$

ed applicando le formule di Gauss-Green:

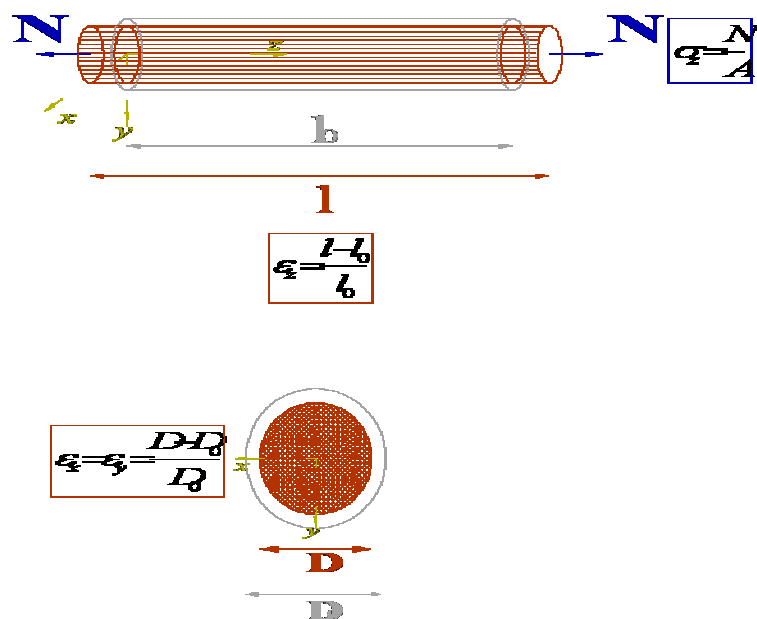
$$\begin{aligned}
L_e &= \int_S \left[(\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v}) n_x + (\mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v}) n_y + (\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v}) n_z \right] ds + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV \\
&= \int_V \left[(\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v})_{,x} + (\mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v})_{,y} + (\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v})_{,z} \right] dV + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV \\
&= \int_V \left[\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v}_{,x} + \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v}_{,y} + \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v}_{,z} \right] dV + \int_V \left[\mathbf{t}_{x,x} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}_{y,y} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}_{z,z} \cdot \mathbf{v} \right] dV + \int_V \mathbf{Y} \cdot \mathbf{v} dV \\
&= \int_V \left[\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v}_{,x} + \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v}_{,y} + \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v}_{,z} \right] dV + \int_V \left[(\mathbf{t}_{x,x} + \mathbf{t}_{y,y} + \mathbf{t}_{z,z} + \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{v} \right] dV
\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è nullo in virtù dell'equazione indefinita di equilibrio alla traslazione. A questo punto possiamo ancora scrivere:

$$\begin{aligned}
L_e &= \int_V \left[(\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v}_{,x}) + (\mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v}_{,y}) + (\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v}_{,z}) \right] dV \\
&= \int_V \left[\begin{aligned} &(\sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}) \cdot (v_{x,x} \mathbf{i} + v_{y,x} \mathbf{j} + v_{z,x} \mathbf{k}) \\ &+ (\tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}) \cdot (v_{x,y} \mathbf{i} + v_{y,y} \mathbf{j} + v_{z,y} \mathbf{k}) \\ &+ (\tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}) \cdot (v_{x,z} \mathbf{i} + v_{y,z} \mathbf{j} + v_{z,z} \mathbf{k}) \end{aligned} \right] dV \\
&= \int_V \left[\begin{aligned} &\sigma_x v_{x,x} + \tau_{xy} v_{y,x} + \tau_{yx} v_{x,y} + \sigma_y v_{y,y} \\ &+ \tau_{zx} v_{x,z} + \tau_{xz} v_{z,x} + \tau_{zy} v_{y,z} + \tau_{yz} v_{z,y} + \sigma_z v_{z,z} \end{aligned} \right] dV \\
&= \int_V \left[\begin{aligned} &\sigma_x v_{x,x} + \tau_{xy} (v_{y,x} + v_{x,y}) + \sigma_y v_{y,y} \\ &+ \tau_{xz} (v_{z,x} + v_{x,z}) + \tau_{yz} (v_{z,y} + v_{y,z}) + \sigma_z v_{z,z} \end{aligned} \right] dV \\
&= \int_V \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right] dV \\
&= \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} dV
\end{aligned}$$

dove si è osservato che devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio alla rotazione. Il teorema è quindi dimostrato.

Applicazione del Teorema dei L.V. alle travature reticolari Un caso semplice di applicazione del Teorema dei L.V. alla meccanica delle strutture è costituito dal calcolo degli spostamenti nodali nelle travature reticolari. Queste strutture sono sistemi di aste rettilinee che, per la loro particolare geometria e condizione di carico, possono rappresentarsi tramite sistemi di pendoli, semplicemente tesi o compressi. Calcoliamo dapprima il lavoro virtuale interno su un singolo pendolo:



Escludendo piccole zone in corrispondenza dei nodi delle travature, lo stato di tensione è monoassiale. Quindi, per una generica asta:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad \epsilon_z = \frac{\Delta L}{L}$$

Il lavoro virtuale interno su una singola asta è perciò pari a:

$$L_i = \int_V \sigma_z^* \epsilon_z dV = \frac{N^*}{A} \frac{\Delta L}{L} \int_V dV = N^* \Delta L$$

dove, poiché il lavoro è virtuale, lo sforzo N^* non è necessariamente coincide con lo sforzo che ha prodotto la variazione di lunghezza ΔL dell'asta.

Applicando il Teorema dei Lavori Virtuali si ha:

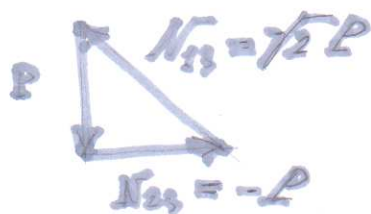
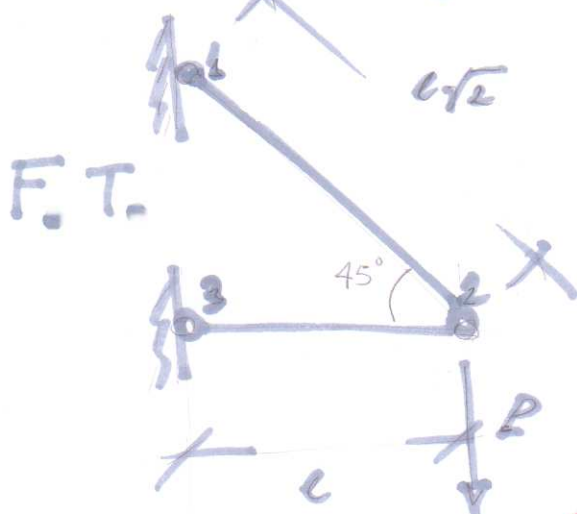
$$\sum_i (\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{v})^{(i)} = \sum_a (N^* \Delta L)^{(a)}$$

dove la prima sommatoria è estesa a tutti i nodi carichi, mentre la seconda è estesa a tutte le aste. Se le aste sono in fase elastica risulta:

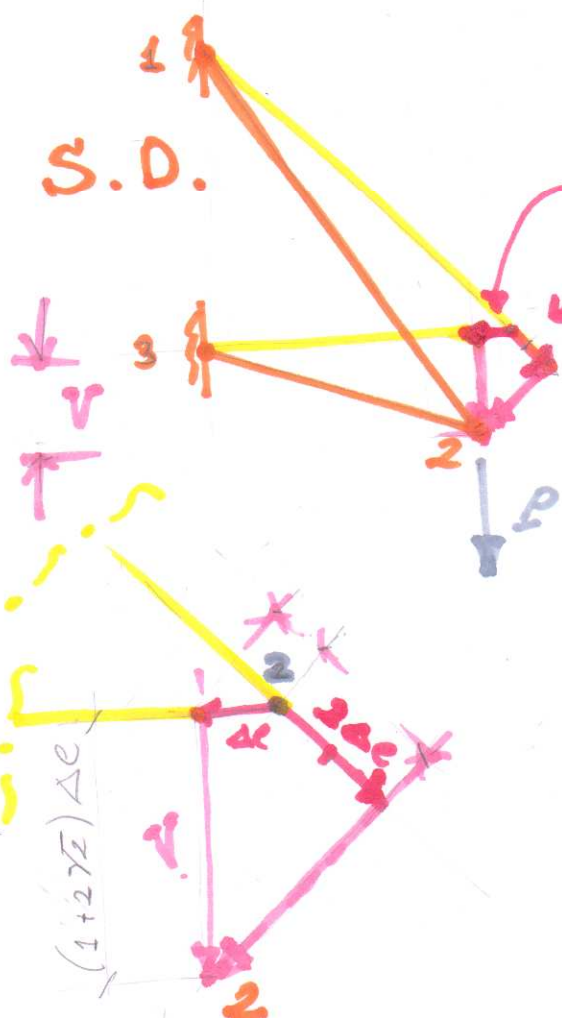
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{EA} \Rightarrow \Delta L = \frac{NL}{EA}$$

ESERCIZI

$$P \cdot v = (N_{12} \times \Delta l_{12}) + N_{23} \Delta l_{23}$$



S.D.



$$\Delta l_{12} = \frac{(\sqrt{2}P)(\sqrt{2}c)}{EA}$$

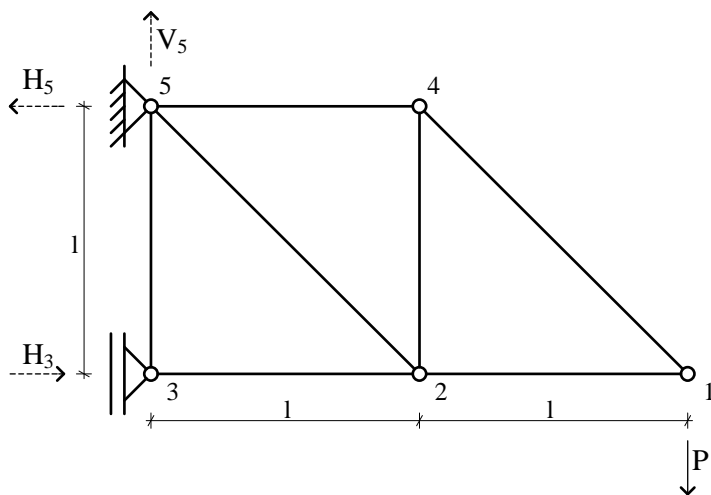
$$\Delta l_{23} = \frac{-P \cdot c}{EA}$$

$$= -\Delta c$$

$$P \cdot v = (\sqrt{2}P) \cdot \left(\frac{2Pc}{EA} \right) + (-P) \cdot \left(\frac{-Pc}{EA} \right)$$

$$\downarrow$$

$$v = (1 + 2\sqrt{2}) \frac{Pc}{EA}$$



$$P = 10^4 \text{ Kg}$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ Kg / cm}^2$$

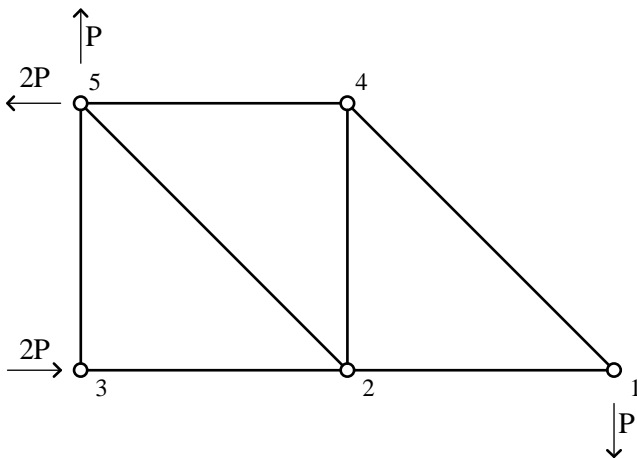
$$\nu = 0,3$$

$$l = 5 \text{ m}$$

Calcolare l'abbassamento (f) del nodo 1 per effetto del carico P .

Analisi statica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_O = 0 \Rightarrow H_5 = H_3 \\ \sum F_V = 0 \Rightarrow V_5 = P \\ \sum M_5 = 0 \Rightarrow H_3 \cdot l - P \cdot 2l = 0 \Rightarrow H_3 = 2P = H_5 \end{array} \right\}$$



Sforzi:

$$N_{14} = \sqrt{2}P = N_{41} (\text{trazione})$$

$$N_{12} = P = N_{21} (\text{compressione})$$

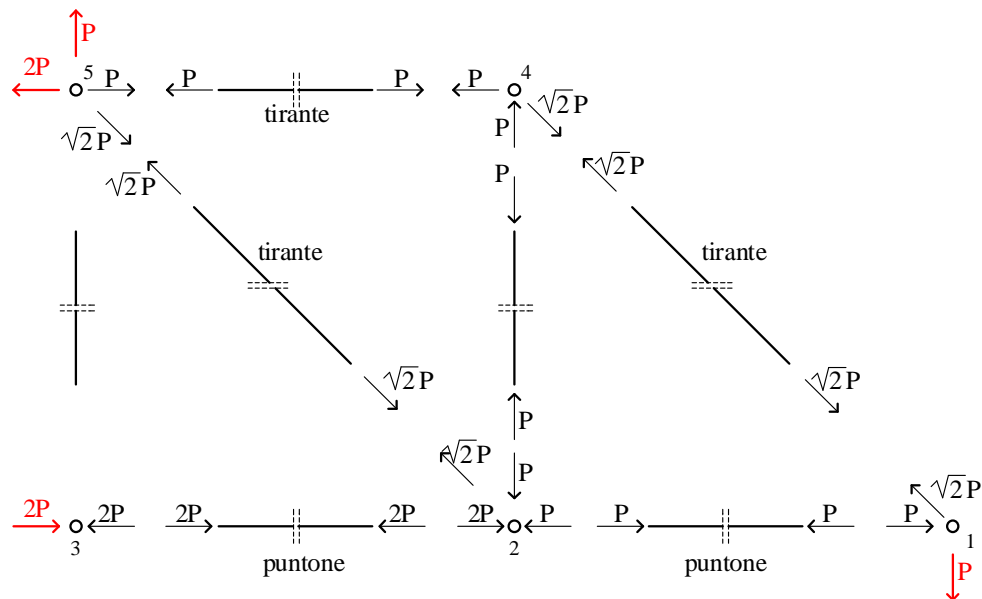
$$N_{23} = 2P = N_{32} (\text{compressione})$$

$$N_{24} = P = N_{42} (\text{compressione})$$

$$N_{25} = \sqrt{2}P = N_{52} (\text{trazione})$$

$$N_{35} = 0 = N_{53}$$

$$N_{45} = P = N_{54} (\text{trazione})$$



Calcolo della deformazione delle aste:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$L_I^* = \int_V \underline{T} \cdot \underline{E} dV = \int_V \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_z \cdot \varepsilon_z dV = \int_V \left(\frac{N}{A} \right) \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} \right) dV = \left(\frac{N}{A} \right) \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} \right) \int_V dV = \frac{N}{A} \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot V = N \cdot \Delta l$$

$$L_I^* = L_E^* \Rightarrow L_E^* = N \cdot \Delta l = \sum_{a=1}^7 (N \cdot \Delta l)_a = P \cdot f$$

Calcolo di L_I^* per ciascuna asta:

$$\text{ASTA 1-2: } L_I^* = -P \cdot \left(-\frac{Pl}{EA} \right)$$

$$\text{ASTA 5-4: } L_I^* = (P) \cdot \left(\frac{Pl}{EA} \right)$$

$$\text{ASTA 5-4: } L_I^* = 0$$

$$\text{ASTA 3-2: } L_I^* = -2P \cdot \left(-\frac{2Pl}{EA} \right)$$

$$\text{ASTA 2-4: } L_I^* = (-P) \cdot \left(-\frac{Pl}{EA} \right)$$

$$\text{ASTA 4-1: } L_I^* = \sqrt{2}P \cdot \left(-\frac{2Pl}{EA} \right)$$

$$\text{ASTAs 5-2: } L_I^* = (\sqrt{2}P) \cdot \left(-\frac{2Pl}{EA} \right)$$

Calcolo di L_I^* :

$$L_I^* = \sum_{a=1}^7 (N \cdot \Delta l)_a = \frac{Pl^2}{EA} \cdot (7 + 4\sqrt{2})$$

$$L_E^* = P \cdot f$$

$$L_I^* = L_E^* \Rightarrow P \cdot f = \frac{P^2 l}{EA} (7 + 4\sqrt{2})$$

da cui

$$f = \frac{P \cdot l}{EA} \cdot (7 + 4\sqrt{2}) = \frac{10^4 \text{ Kg} \cdot 500 \text{ cm}}{2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \cdot 10 \text{ cm}^2} \cdot (7 + 4\sqrt{2}) \approx 3 \text{ cm}$$