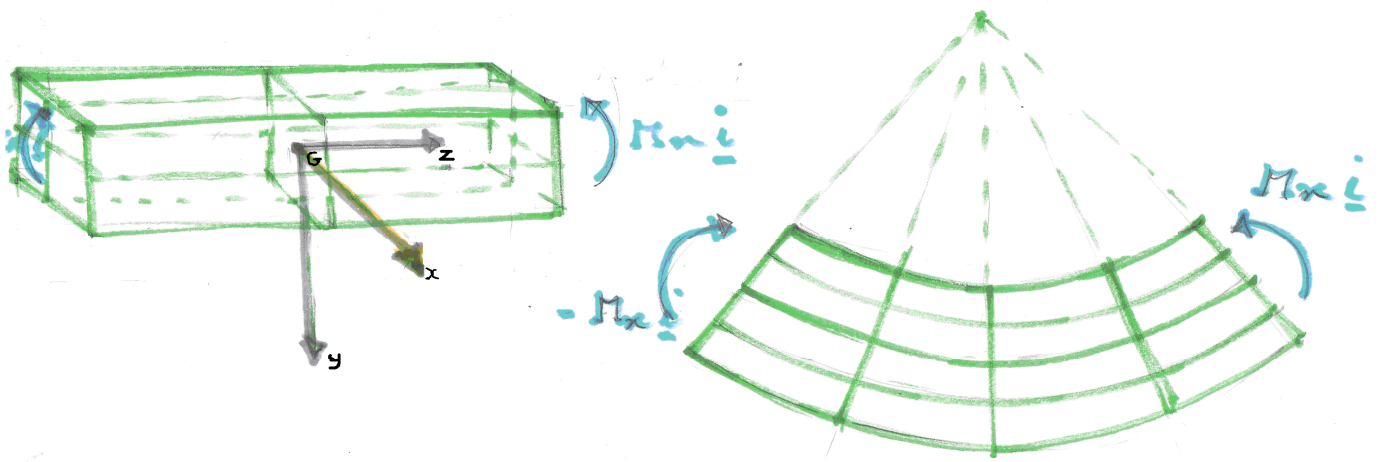


Deformazioni delle travi

Flessione pura In questi appunti si studia una trave elastica di sezione rettangolare soggetta a delle forze superficiali sulle basi staticamente equivalenti alle coppie flettenti $M_x \mathbf{i}$ sulla base di destra e $-M_x \mathbf{i}$ sulla base di sinistra, così come rappresentato in Figura.

Ammettiamo per semplicità che la trave sia a sezione rettangolare e che le coppie flettenti agiscano su un piano mediano verticale. Facciamo coincidere l'origine del riferimento locale con il baricentro della sezione centrale e notiamo che il piano Gxy su cui giace la sezione è piano di simmetria meccanica, così come è piano di simmetria meccanica il piano verticale Gyz , mentre il piano orizzontale Gxz è piano di antisimmetria.

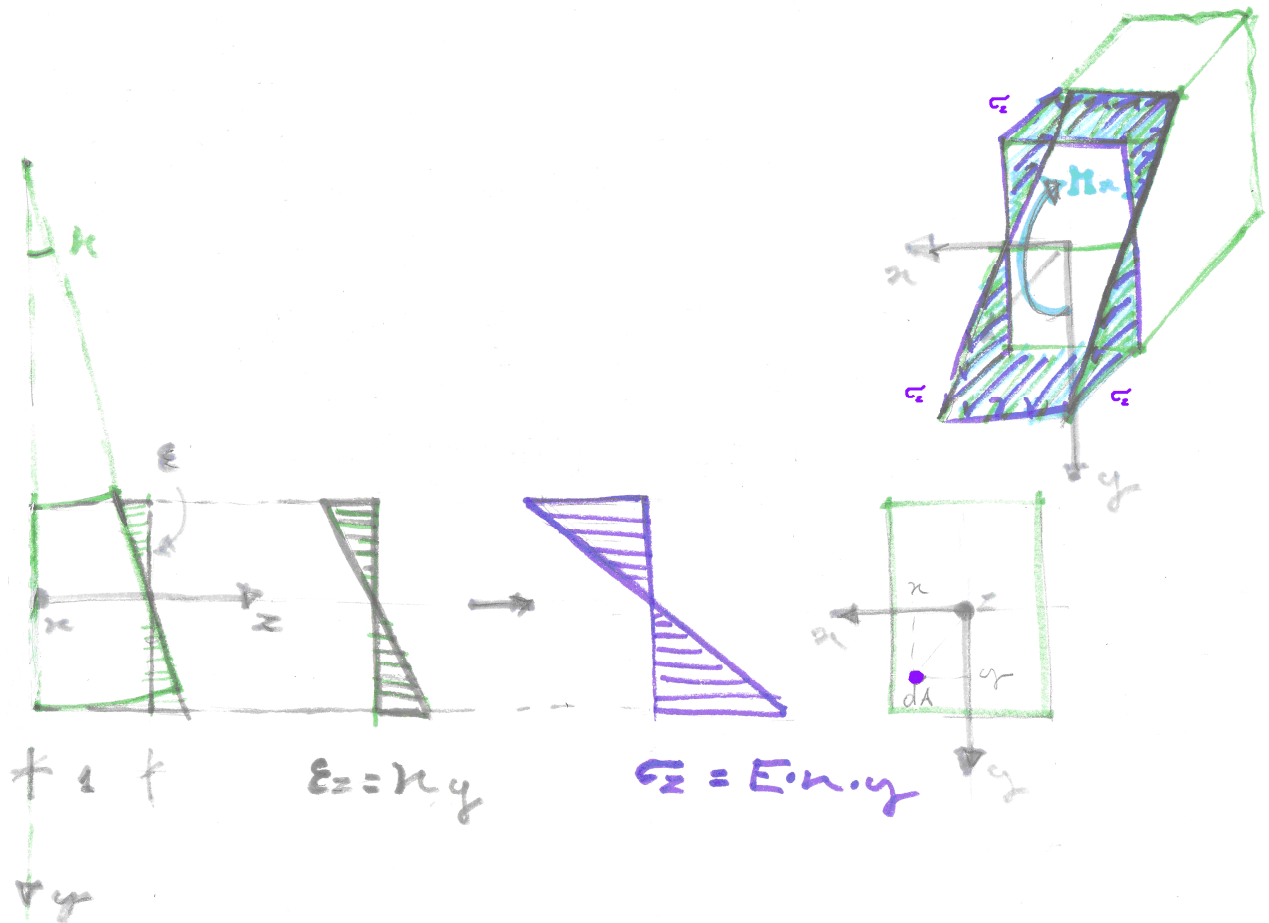


Come noteremo, queste simmetrie saranno rispettate dallo stato elastico indotto nella trave. Rimandando ai corsi successivi una trattazione rigorosa dell'argomento, qui si anticipano alcuni risultati fondamentali della teoria di De Saint Venant, che affronta in casi particolari il problema di equilibrio elastico relativo a travi elastiche di sezione generica. In particolare in questa teoria, si dimostra che:

- Ad un'opportuna distanza dalle basi lo stato elastico non è influenzato dalla distribuzione puntuale delle forze superficiali applicate sulle basi, ma solo dal valore delle coppie M_x staticamente equivalenti alle forze assegnate.
- Ad un'opportuna distanza dalle basi lo stato di tensione indotto dalle coppie flettenti M_x è monoassiale, con asse coincidente con l'asse longitudinale della trave.
- Ad un'opportuna distanza dalle basi le sezioni ortogonali della trave rimangono piane a deformazione avvenuta, così come mostrato in Figura. In particolare esse

si mantengono ortogonali alle fibre longitudinali, che sono mutate in archi di circonferenza.

Per chiarire le conseguenze di questi risultati generali, consideriamo un concio di trave compreso fra due sezioni a distanza unitaria:



Definiamo curvatura κ la rotazione flessionale relativa fra due sezioni a distanza unitaria, così come indicato in figura, ed osserviamo che:

$$\mathbf{R}^+ = \int_A \sigma_z \mathbf{k} dA = E\kappa \left(\int_A y dA \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

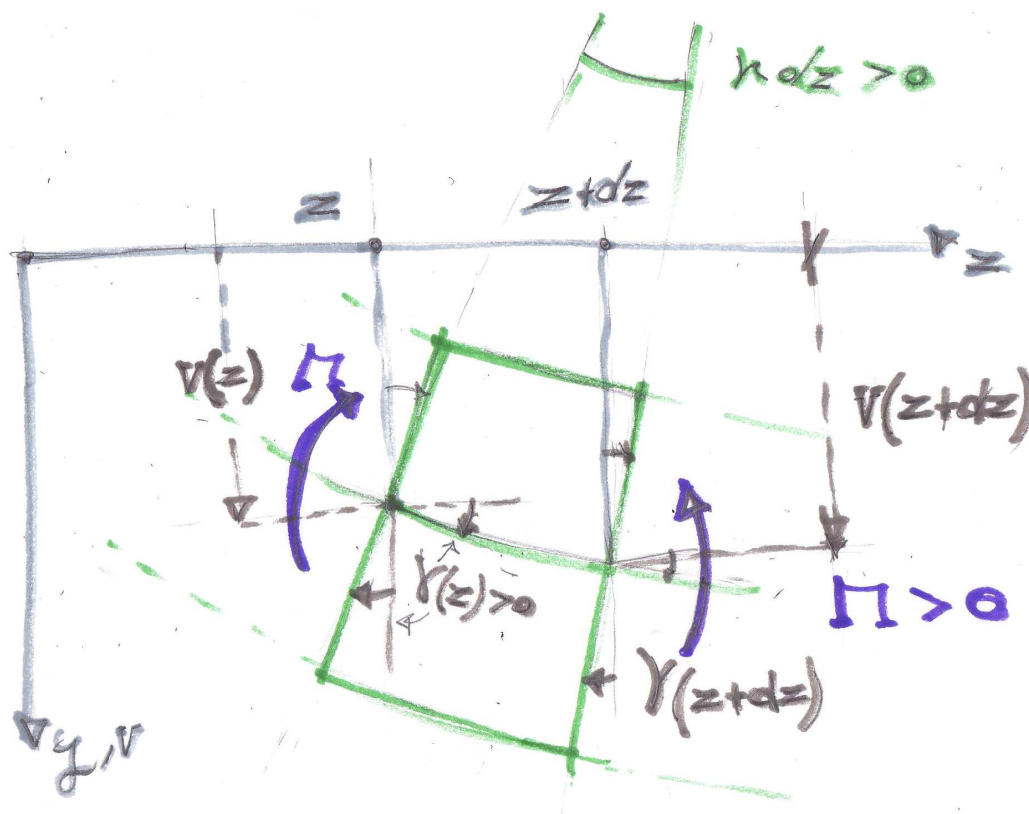
$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \int_A (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \wedge \sigma_z \mathbf{k} dA = E\kappa \int_A (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \wedge y\mathbf{k} dA \\ &= E\kappa \left(\int_A y^2 dA \mathbf{i} - \int_A xy dA \mathbf{j} \right) = E\kappa J_x \mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{M_x}{EJ_x}$$

$$\sigma_z = E\kappa y = E \left(\frac{M_x}{EJ_x} \right) = \frac{M_x}{J_x} y$$

Equazioni cinematiche nella teoria tecnica della trave. Equazione della linea elastica

Nella teoria tecnica della trave i risultati della teoria di DSV vengono estesi a condizioni di carico più generali rispetto a quelle considerate nella trattazione originaria. In particolare, nel modello più semplice della teoria tecnica si accetta che in ogni condizione di carico e di vincolo le sezioni si conservino piane ed ortogonali alle fibre longitudinali, così come mostrato in Figura:



Se si accetta l'ipotesi di piccoli spostamenti, si ottengono quindi le equazioni cinematiche:

$$\gamma(z) = v_{,z}(z)$$

$$\kappa(z)dz = \gamma(z) - \gamma(z+dz) \Rightarrow \kappa(z) = -\gamma_{,z}(z)$$

$$\begin{cases} \gamma(z) = v_{,z}(z) \\ \kappa(z) = -\gamma_{,z}(z) \end{cases} \Rightarrow \kappa(z) = -v_{,zz}(z)$$

dove nell'equazione $\kappa(z) = -\gamma_{,z}(z)$ il segno meno è dovuto alle convenzioni qui adottate, secondo cui la curvatura è positiva se indotta da un momento flettente positivo e la rotazione della sezione è positiva se oraria.

Note le condizioni di vincolo ed il momento flettente in ogni sezione, è possibile quindi, attraverso la *legge costitutiva elastica per la trave* $\kappa = M_x / EJ_x$, dedotta dalla teoria di DSV, determinare la configurazione deformata della trave, integrando l'*equazione della linea elastica*:

$$\frac{M_x(z)}{EJ_x} = -v_{,zz}(z).$$

Esempi

.....

Analogia di Mohr Nell'ambito dell'ipotesi che caratterizzano il modello della teoria tecnica della trave prima descritto, sono valide le seguenti equazioni statiche e cinematiche:

Equazioni Statiche

$$q(z) = -T_{,z}(z)$$

$$T(z) = M_{,z}(z)$$

$$q(z) = -M_{,zz}(z)$$

Equazioni Cinematiche

$$\kappa(z) = -\gamma_{,z}(z)$$

$$\gamma(z) = v_{,z}(z)$$

$$\kappa(z) = -v_{,zz}(z)$$

E' immediato osservare che i due gruppi di equazioni sono formalmente identici. In base a questa proprietà è possibile rinominare le variabili cinematiche, ponendo:

$$q^*(z) = \kappa(z)$$

$$T^*(z) = \gamma(z)$$

$$M^*(z) = v(z)$$

e determinare gli spostamenti e le rotazioni della trave reale come variabili statiche (taglio e momento flettente) di una trave ausiliaria, opportunamente vincolata. I vincoli a cui deve essere soggetta la trave ausiliaria devono imporre condizioni statiche che, nell'ambito di questa analogia, siano formalmente identiche alle condizioni cinematiche imposte dai vincoli della trave reale.

E' perciò possibile affrontare un problema cinematico per una trave assegnata come problema statico per una trave ausiliaria opportunamente vincolata e soggetta ad un carico fittizio $q^*(z)$ pari alla curvatura $\kappa(z)$ della trave reale.

Esempi

.....