

APPUNTI
DI
STATICA DEI CORPI RIGIDI

Prof. ing. Francesco Trentadue

CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

Un corpo è rigido se mantiene inalterata la sua forma e le sue dimensioni durante qualunque moto. Quindi, comunque si scelga una fibra materiale di estremi \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 appartenente al corpo, la sua posizione potrà cambiare nel tempo ma la sua lunghezza l_0 dovrà rimanere costante:

$$\forall t: \left(\mathbf{P}_1(t) - \mathbf{P}_0(t) \right) \cdot \left(\mathbf{P}_1(t) - \mathbf{P}_0(t) \right) = l_0^2. \quad (1.1)$$

Il teorema di Mozzi stabilisce che un corpo è rigido, e perciò la precedente relazione è identicamente verificata, se e soltanto se in qualsiasi moto le velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_0 dei punti materiali arbitrari \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 rispettano la seguente legge:

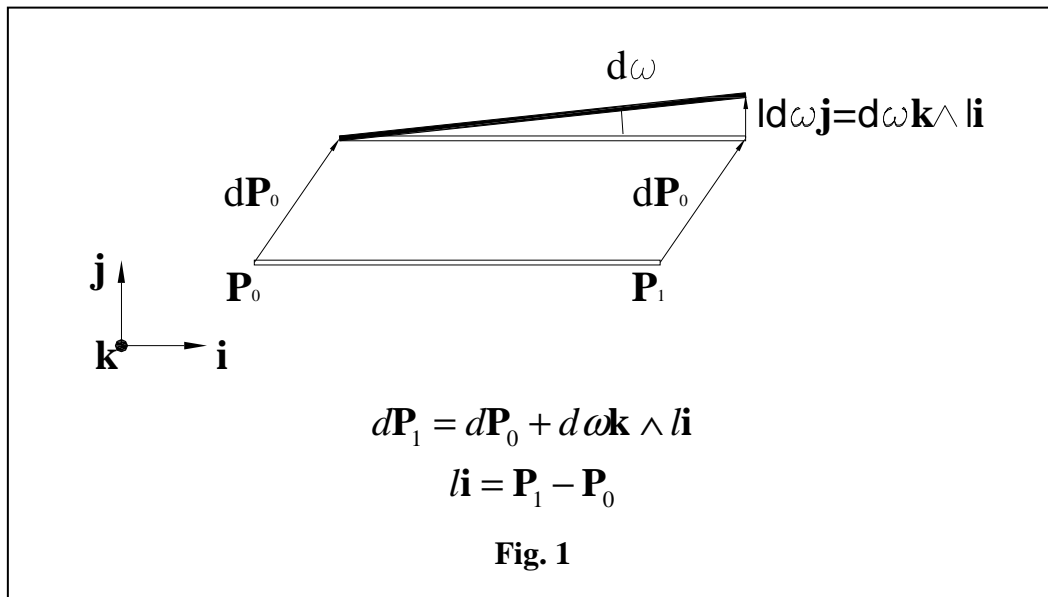
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad (1.2)$$

dove $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ è il vettore velocità di rotazione angolare.

Poiché nella statica classica si ricerca una formulazione delle leggi cinematiche e dell'equilibrio non dipendente dal tempo fisico, la legge di Mozzi viene spesso espressa in termini di spostamenti infinitesimi:

$$d\mathbf{P}_1 = d\mathbf{P}_0 + d\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad (1.3)$$

dove, per chiarire la totale equivalenza delle relazioni (1.2) e (1.3), si può pensare che $d\mathbf{P}_1 = \mathbf{v}_1 dt$ e $d\mathbf{P}_0 = \mathbf{v}_0 dt$ siano gli spostamenti che i punti materiali \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_0 subiscono nel periodo di tempo infinitesimo dt e che $d\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} dt$ sia la rotazione infinitesima subita del corpo rigido nello stesso periodo di tempo.



Il significato geometrico della legge di Mozzi può essere chiarito se consideriamo un'asta le cui dimensioni trasversali siano piccole rispetto alla sua lunghezza l ed il cui asse sia il vettore $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = l\mathbf{i}$, parallelo al versore \mathbf{i} . Supponiamo che lo spostamento elementare dell'asta avvenga nel piano della rappresentazione, di normale \mathbf{k} , ed osserviamo dalla Figura 1 che lo spostamento totale del secondo estremo \mathbf{P}_1 si può decomporre in due spostamenti:

- Uno spostamento $d\mathbf{P}_0$ dovuto alla traslazione dell'asta, in cui il secondo estremo dell'asta \mathbf{P}_1 subisce lo stesso spostamento del primo estremo \mathbf{P}_0 .
- Uno spostamento $ld\omega\mathbf{j} = d\omega\mathbf{k} \wedge l\mathbf{i}$ dovuto alla rotazione elementare $d\omega$.

Il teorema di Mozzi afferma quindi che uno spostamento elementare rigido si compone di una traslazione elementare e di una rotazione elementare.

Sono importanti le seguenti osservazioni:

- In natura non esistono corpi rigidi, ma ogni corpo ha una sua deformabilità, anche se limitata.
- Il modello di corpo rigido permette di ottenere informazioni solo parziali sulla risposta di una struttura alle forze ad essa applicate, perciò non permette di risolvere i quesiti fondamentali della Scienza delle Costruzioni, che si devono affrontare cercando una modellazione delle strutture come corpi deformabili.

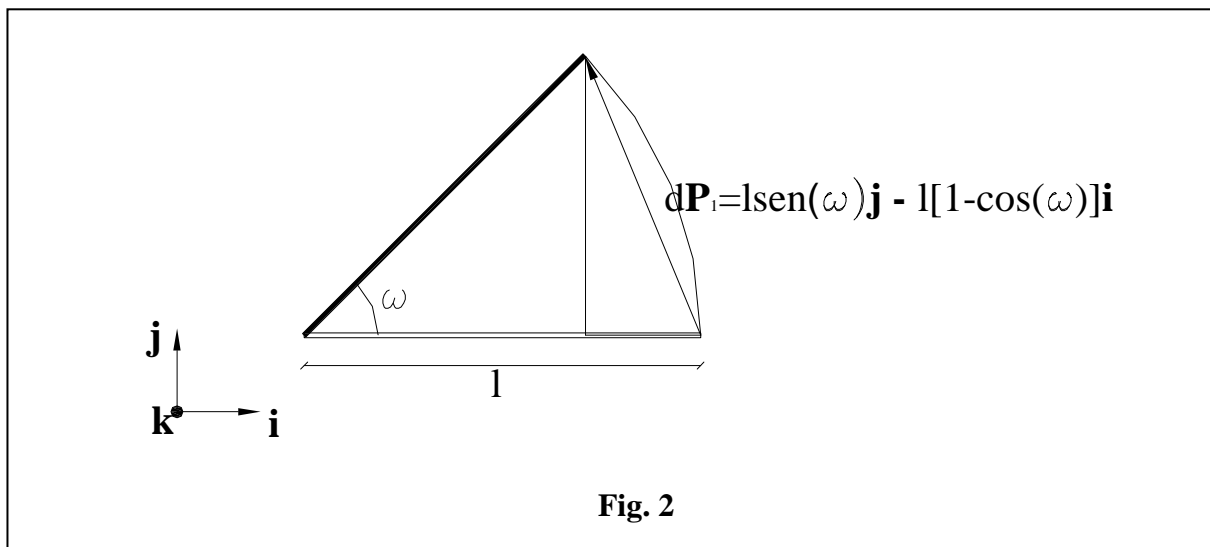
PICCOLI SPOSTAMENTI. Nella meccanica delle strutture e dei solidi è assai comune l'ipotesi di *piccoli spostamenti* o *spostamenti infinitesimi*, parzialmente giustificata dall'osservazione sperimentale ed applicabile ad una parte rilevante dei problemi strutturali, che permette di semplificare in modo sostanziale lo studio di questi ultimi.

Nell'ambito di questa ipotesi, come già anticipato, i campi di spostamento rigidi sono descritti tramite la legge di Mozzi e, più in generale, le leggi cinematiche sono rappresentabili attraverso relazioni lineari.

In merito a quest'ultima osservazione si può notare che se l'asta della Figura precedente fosse soggetta ad una rotazione finita con asse \mathbf{k} attorno all'estremo \mathbf{P}_0 , lo spostamento del secondo estremo dell'asta risulterebbe pari a:

$$d\mathbf{P}_1 = l \sin(\omega) \mathbf{j} - l[1 - \cos(\omega)] \mathbf{i} \quad (1.4)$$

mostrando una dipendenza chiaramente non lineare dalla rotazione ω .

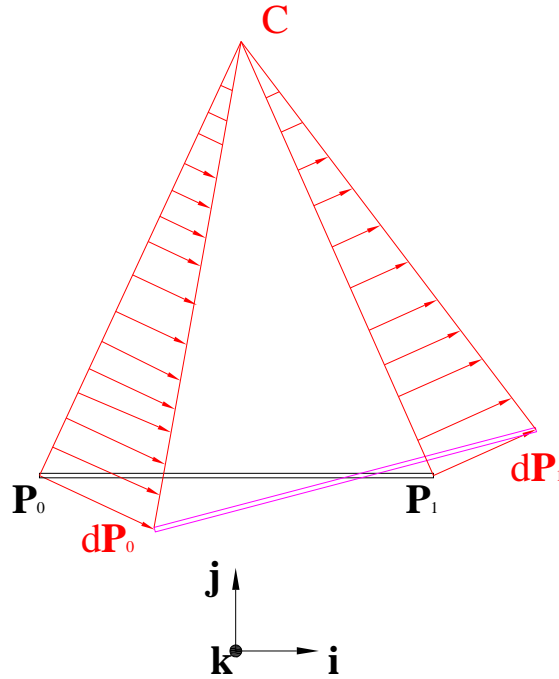


Se però si considera l'angolo di rotazione ω piccolo, sviluppando in serie di Mac Lauren la precedente relazione si ha:

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_1 = l \sin(\omega) \mathbf{j} - l[1 - \cos(\omega)] \mathbf{i} &= l \left[\left(\omega - \frac{\omega^3}{3!} \right) \mathbf{j} - \left(1 - \left(1 - \frac{\omega^2}{2!} \right) \right) \mathbf{i} + \mathbf{O}(\omega^4) \right] \\ &= l\omega \mathbf{j} + \mathbf{O}(\omega^2) \end{aligned}$$

mostrando così che la validità della legge di Mozzi per valori piccoli della rotazione.

SPOSTAMENTI ELEMENTARI RIGIDI PIANI. CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE. Consideriamo un generico corpo soggetto ad uno spostamento rigido elementare, ad esempio la barra rappresentata in figura, il cui spostamento avviene nel piano di normale \mathbf{k} :



In base alla legge di Mozzi, gli spostamenti dei due estremi della barra sono legati dalla relazione:

$$dx_1 \mathbf{i} + dy_1 \mathbf{j} = dx_0 \mathbf{i} + dy_0 \mathbf{j} + d\omega \mathbf{k} \wedge [(x_1 - x_0) \mathbf{i} + (y_1 - y_0) \mathbf{j}].$$

Il moto rigido piano in figura, come ogni altro spostamento piano elementare, è anche esprimibile come rotazione elementare attorno ad un punto C del piano, detto *centro di istantanea rotazione*, di coordinate x_c e y_c , per cui risulta anche:

$$dx_1 \mathbf{i} + dy_1 \mathbf{j} = d\omega \mathbf{k} \wedge [(x_1 - x_c) \mathbf{i} + (y_1 - y_c) \mathbf{j}]$$

$$dx_0 \mathbf{i} + dy_0 \mathbf{j} = d\omega \mathbf{k} \wedge [(x_0 - x_c) \mathbf{i} + (y_0 - y_c) \mathbf{j}]$$

In queste dispense non si esporrà la procedura analitica per la determinazione del centro di istantanea rotazione. E' però utile spesso determinare graficamente il centro di istantanea rotazione: C si ottiene tracciando da \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 le normali ai vettori spostamento $d\mathbf{P}_0$ e $d\mathbf{P}_1$ e determinando la loro intersezione, così come fatto in figura.

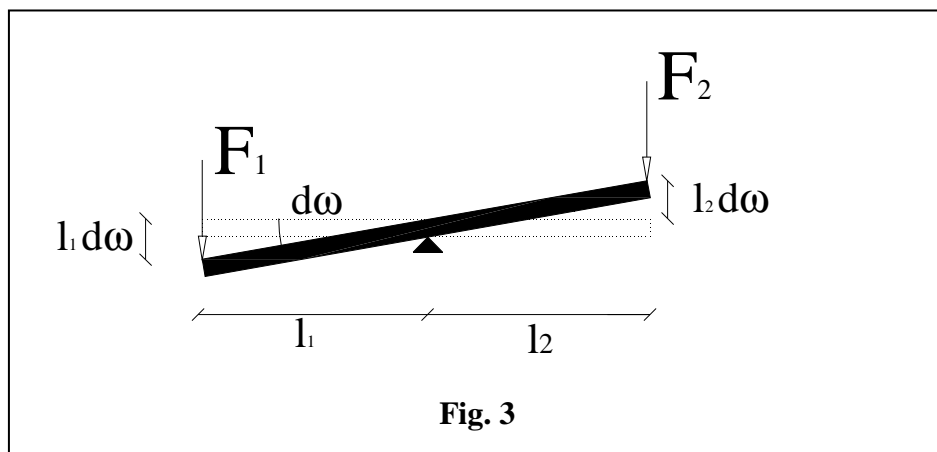
Nel caso in cui il corpo sia soggetto ad una traslazione semplice, le due normali si intersecano in un punto all'infinito ed il centro di istantanea rotazione è il punto improprio della direzione ortogonale a quella della traslazione.

Come si mostrerà nel seguito, i vincoli imposti ad un corpo rigido piano limitano i possibili moti del corpo e le posizioni possibili del centro di istantanea rotazione ad essi relativi.

PRINCIPIO DEL LAVORI VIRTUALI ED EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Le equazioni cardinali della statica si deducono modellando i corpi solidi come corpi rigidi ed accettando un Principio a fondamento della Scienza delle Costruzioni e di tutta la Meccanica, noto come Principio dei Lavori Virtuali (PLV).

Una prima intuizione di questo Principio si trova negli scritti di alcuni scienziati greci di scuola Aristotelica, che ricercarono un'interpretazione *razionale* delle leggi di equilibrio della bilancia e delle leve. Il più importante fra questi fu il siracusano Archimede.



Il PLV afferma che la bilancia in Figura è in equilibrio se e solo se il lavoro dalla forza F_1 , causato da un arbitrario spostamento *virtuale* della bilancia, opportunamente piccolo, è uguale e contrario al lavoro dalla forza F_2 . Il termine *virtuale* indica che non vi è alcuna relazione fisica tra lo spostamento elementare impresso alla bilancia e le forze agenti su essa.

Quindi, per qualsiasi rotazione elementare $d\omega$, deve risultare:

$$F_1 (l_1 d\omega) + F_2 (-l_2 d\omega) \equiv 0, \quad (2.1)$$

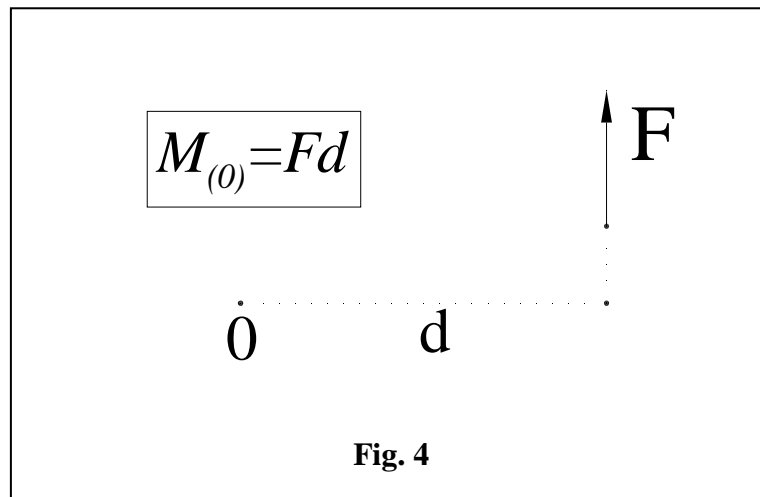
da cui si deduce la relazione di equilibrio

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad (2.2)$$

che introduce il concetto di momento di una forza, in questo caso pari al prodotto della forza per la distanza del suo punto di applicazione dal fulcro della bilancia.

Il PLV stabilisce quindi che la bilancia è in equilibrio se e solo se i momenti delle due forze (considerati non affetti da segno) sono uguali.

Come è noto dalla statica, in generale il momento di una forza rispetto ad un polo generico O è definito come prodotto della forza per il suo *braccio* d , pari a la distanza della retta di applicazione della forza dal polo O .



APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI AD UN GENERICO CORPO RIGIDO LIBERO. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

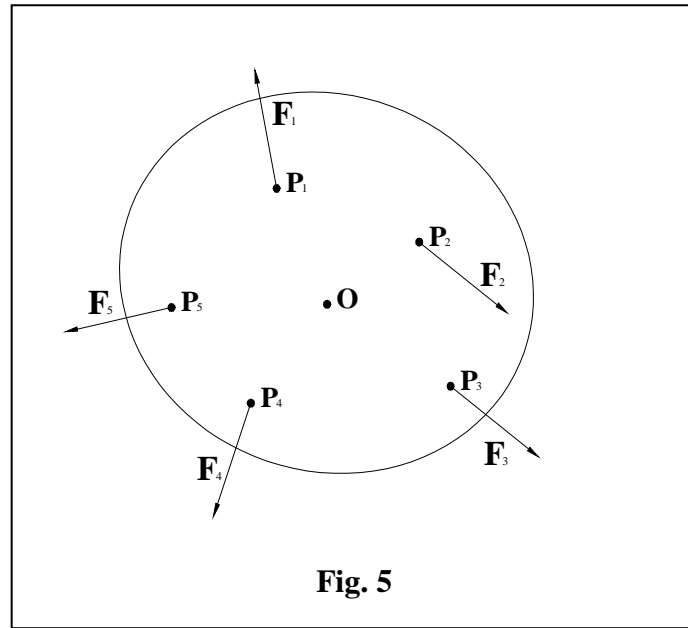


Fig. 5

Applichiamo ora il PLV ad un generico corpo rigido libero per stabilire quali leggi ne determinino l'equilibrio.

Per ogni arbitrario spostamento rigido elementare il lavoro virtuale delle forze applicate deve essere identicamente nullo:

$$\begin{matrix} \forall d\mathbf{q} \\ \forall d\boldsymbol{\omega} \end{matrix} : \quad \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot [d\mathbf{q} + d\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \equiv 0, \quad (2.3)$$

dove $d\mathbf{q}$ è la traslazione elementare di un generico punto materiale O e $d\boldsymbol{\omega}$ la rotazione elementare del corpo.

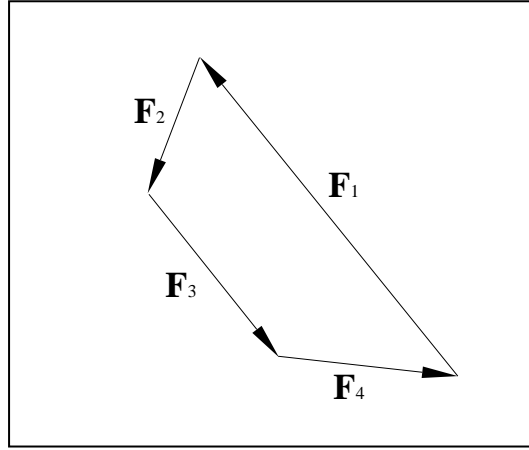
Supponiamo in un primo tempo che lo spostamento virtuale assegnato sia la sola traslazione arbitraria $d\mathbf{q}$, per cui, annullando la rotazione $d\boldsymbol{\omega}$ nella (2.3), otteniamo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i = d\mathbf{q} \cdot \sum_i \mathbf{F}_i \equiv 0, \quad (2.4)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $d\mathbf{q}$, deduciamo che la *risultante* delle forze agenti sul corpo deve essere nulla:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Questa legge può essere interpretata geometricamente osservando che essa impone che il poligono delle forze sia chiuso:



Supponiamo ora che lo spostamento virtuale imposto al corpo sia la sola rotazione arbitraria $d\omega$. Annullando la traslazione $d\mathbf{q}$, la (2.3) si riduce a:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\omega \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \equiv 0 \quad (2.6)$$

dove, per le regole del prodotto vettoriale misto:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\omega \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) = \sum_i d\omega \cdot (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i = d\omega \cdot \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i \equiv 0 \quad (2.7)$$

da cui, per l'arbitrarietà di $d\omega$, si deduce la condizione di equilibrio:

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}) = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$

Dove $\mathbf{M}(\mathbf{O})$ è il *momento risultante* rispetto al polo generico \mathbf{O} .

Le equazioni che impongono quindi l'equilibrio di un corpo rigido libero sono:

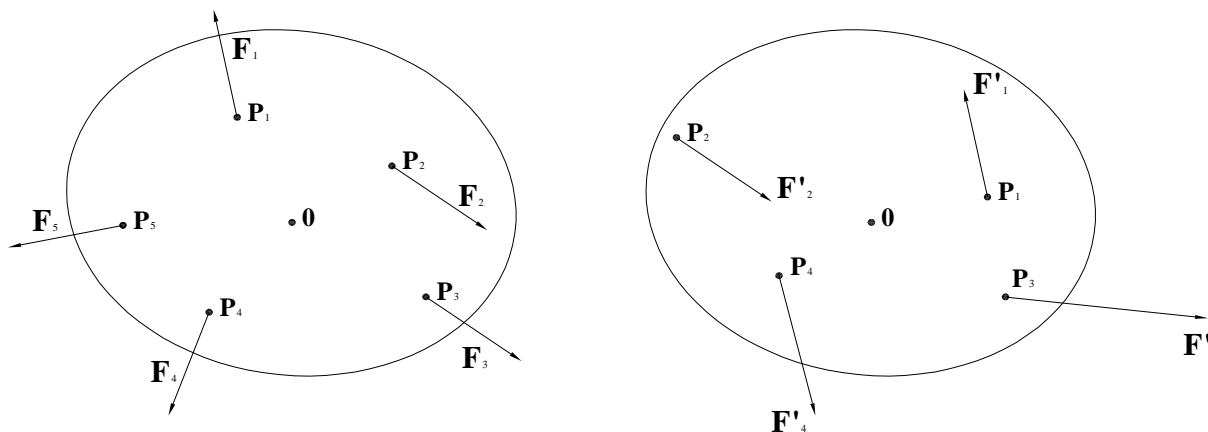
$$\begin{cases} \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(\mathbf{O}) = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

Esse impongono quindi che, rispetto ad un polo generico, la risultante ed il momento risultante di tutte le forze agenti sono nulli. Poiché queste quantità vettoriali dipendono linearmente dalle forze applicate, sussiste la seguente proprietà:

Se su un singolo corpo rigido in equilibrio si sostituisce a delle forze agenti una o più forze aventi lo stessa risultante e lo stesso momento risultante (staticamente equivalenti), il corpo permane in equilibrio.

SISTEMI DI FORZE STATICAMENTE EQUIVALENTI. Due sistemi di forze si dicono *staticamente equivalenti* se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo assegnato.

SISTEMI DI FORZE STATICAMENTE EQUIVALENTI



$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \mathbf{R} \\ \mathbf{M}'(\mathbf{O}) &= \mathbf{M}(\mathbf{O}) \end{aligned}$$

In conseguenza della legge di trasposizione dei momenti (già nota dai corsi precedenti), due sistemi staticamente equivalenti hanno lo stesso momento risultante rispetto a qualsiasi polo.

Il concetto di equivalenza statica fra sistemi di forze è di notevole utilità per le applicazioni della statica dei corpi rigidi (come sarà mostrato nelle esercitazioni).

Teorema. I sistemi di forze con risultante non nulla ed aventi *invariante scalare* I nullo:

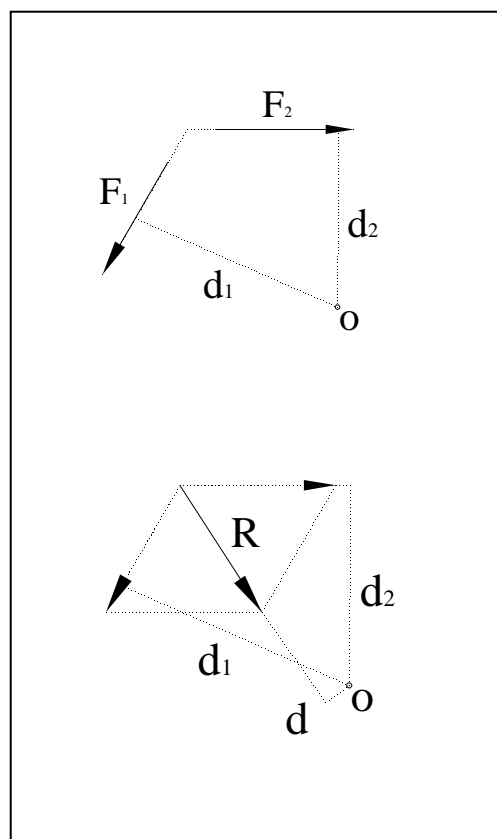
$$\begin{cases} \mathbf{R} \neq \mathbf{0} \\ I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{O}) = 0 \end{cases}$$

sono staticamente equivalenti ad una sola forza, detta *risultante equivalente*. L'asse di applicazione della risultante equivalente è detto *asse centrale* del sistema.

Sono sistemi ad invariante scalare nullo i sistemi di forze piani, i sistemi di forze paralleli ed i sistemi di forze concorrenti in un punto.

Qui di seguito sono riportati due classici esempi di determinazione grafica della risultante equivalente, relativi ad un sistema di due forze e ad un sistema costituito da una forza ed una coppia.

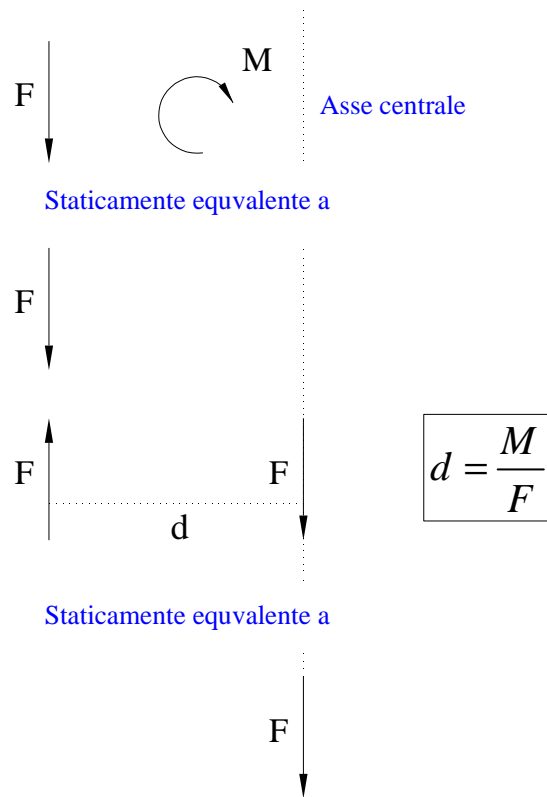
Risultante equivalente di un sistema piano di due forze



$$Rd = F_1d_1 - F_2d_2$$

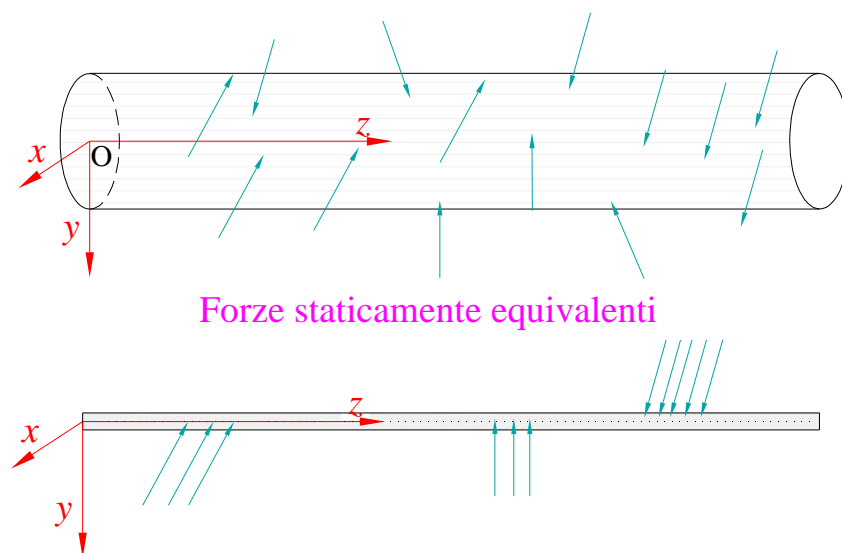
Il procedimento grafico ora esposto può essere esteso a sistemi piani costituiti da un numero generico di forze, reiterando le operazioni sopra esposte e sostituendo ad ogni iterazione ad una o più coppie di forze la loro risultante equivalente.

Risultante equivalente di un sistema piano costituito da una forza ed una coppia



TRAVE

La trave è un solido tridimensionale generato dalla traslazione di una figura piana, che chiamiamo *sezione* della trave, in direzione ortogonale al suo piano. Le dimensioni trasversali della sezione devono essere piccole rispetto alla lunghezza della trave. La linea congiungente i baricentri delle sezioni è chiamata *asse* della trave. La trave viene spesso rappresentata tramite un modello di calcolo costituito da un elemento solido monodimensionale coincidente con il suo asse. Le forze applicate su ogni concio elementare (porzione di trave compresa fra due sezioni a distanza infinitesima) vengono rappresentate da forze staticamente equivalenti applicate sul baricentro del concio. Gli esempi svolti nelle esercitazioni chiariranno questo concetto.



Anche se in queste dispense si tratta soltanto delle travi ad asse rettilineo, come quella rappresentata in Figura, nelle applicazioni sono anche importanti le travi ad asse curvilineo (archi) e le travi a sezione variabile.

Assegnata una struttura costituita da travi, per ogni trave si stabilisce un sistema di riferimento locale, in generale distinto dal sistema di riferimento globale dell'intera struttura. In Figura è indicata la scelta del riferimento locale più utilizzata nella letteratura italiana, in cui l'asse z coincide con la retta che congiunge i baricentri delle sezioni e l'origine è posta nel baricentro della sezione di sinistra. E' necessario osservare che questa è solo una delle scelte possibili e che possono essere fatte scelte

diverse, come avviene in diverse norme internazionali ed in molti programmi di calcolo, senza che siano introdotte differenze di natura concettuale.

MODELLAZIONE DEI VINCOLI E DELLE TRAVI

Vedi appunti delle lezioni

STRUTTURE LABILI, ISOSTATICHE ED IPERSTATICHE

In queste dispense si introducono i concetti di labilità, isostaticità ed iperstaticità di una struttura (attualmente modellata come uno o più corpi rigidi vincolati tra di loro e con l'esterno), ponendone in risalto solo gli aspetti fisico-meccanici. I conseguenti sviluppi analitici sono quindi rimandati alla parte esercitativa.

In particolare, una struttura si definisce:

- **labile**, se può sviluppare moti rigidi, finiti o anche solo infinitesimi;
- **isostatica**, se non può sviluppare moti rigidi ed è soggetta ad un numero strettamente necessario di condizioni di vincolo;
- **iperstatica**, se non può sviluppare moti rigidi ed è soggetta ad un numero di condizioni di vincolo superiore a quello strettamente necessario.

Da queste definizioni, di natura cinematica, conseguono le seguenti proprietà relative all'equilibrio tra forze attive e reattive:

- In una struttura **labile** si può realizzare l'equilibrio solo in corrispondenza di particolari sistemi di forze applicate, mentre in generale non è possibile che si realizzi l'equilibrio statico.
- In una struttura **isostatica**, per ogni sistema di forze applicate, si può sviluppare uno ed un solo sistema di reazioni vincolari in grado realizzare l'equilibrio. Quindi, per ogni sistema di forze, essa sarà **staticamente determinata**.
- In una struttura **iperstatica**, per ogni sistema di forze esterne attive, si possono sviluppare infiniti sistemi di reazioni vincolari in grado di realizzare l'equilibrio. Quindi, per ogni sistema di forze, essa sarà **staticamente indeterminata**.

Sono a questo punto necessarie alcune osservazioni:

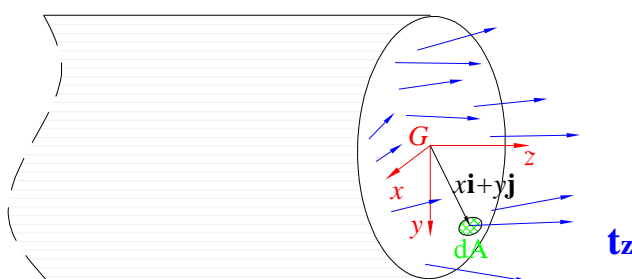
- Poiché le strutture labili (anche dette *cinematismi*) non sono in grado di equilibrare sistemi di forze qualsiasi, esse devono essere assolutamente evitate

nell'ingegneria strutturale, mentre sono l'oggetto di studio della *meccanica delle macchine*.

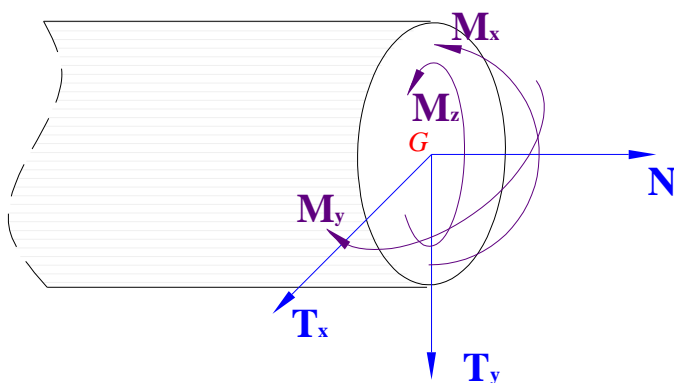
- Nei casi particolari in cui le strutture labili sono in grado di equilibrare le forze applicate, in relazione al numero e alla disposizione dei vincoli esse possono risultare sia staticamente determinate (sono cioè in grado di equilibrare le forze applicate in un sol modo) che staticamente indeterminate (sono cioè in grado di equilibrare le forze applicate in infiniti modi).
- Da un punto di vista fisico, è inaccettabile che in una struttura staticamente indeterminata le reazioni vincolari possano assumere infiniti valori diversi in corrispondenza di uno stesso sistema di forze attive. In realtà, questa indeterminazione è solo una conseguenza della modellazione della struttura come corpo rigido, in questo caso inadeguata a rappresentare la realtà fisica. Come si vedrà nel seguito del corso l'indeterminazione dello stato di equilibrio si supera abbandonando la modellazione come corpo rigido e rappresentando la struttura come corpo deformabile.

FORZE INTERNE IN UNA TRAVE. CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE. Consideriamo una trave ed operiamo idealmente un taglio in una generica sezione, separando così la trave in due parti complementari. Rimandando i necessari approfondimenti all'*analisi della tensione*, è possibile qui anticipare che l'interazione fra le due parti in cui la trave è stata idealmente divisa viene modellata tramite forze *interne* di superficie, dette *tensioni*.

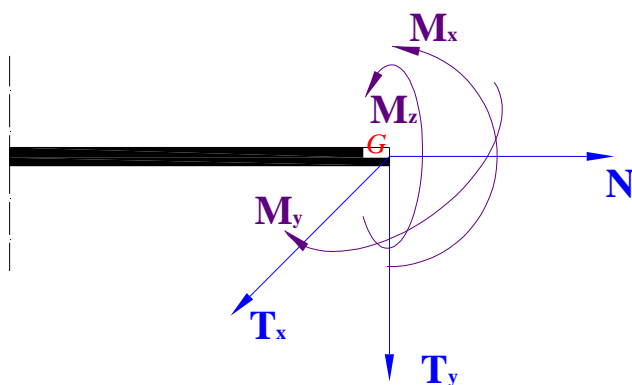
Nella figura che segue è rappresentata una delle due parti complementari in cui la trave è stata idealmente divisa e le tensioni agenti sulla sezione che la delimita, la cui normale esterna è concorde all'asse z :



staticamente equivalente



staticamente equivalente



La risultante \mathbf{R} ed il momento risultante rispetto al baricentro della sezione $\mathbf{M}_{(G)}$ delle *tensioni* agenti nella sezione in esame vengono scomposti nelle loro componenti secondo gli assi del sistema di riferimento locale della trave:

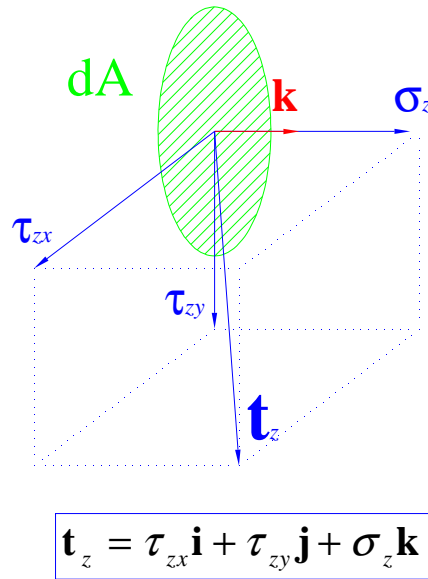
$$\mathbf{R} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + N \mathbf{k}$$
$$\mathbf{M}_{(G)} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

dove:

- Le due componenti T_x e T_y della risultante \mathbf{R} secondo gli assi Gx e Gy sono denominate *sforzi di taglio*.
- La componente N in direzione normale alla sezione è chiamata *sforzo normale*.
- Le due componenti M_x e M_y del momento risultante $\mathbf{M}_{(G)}$ secondo gli assi Gx e Gy sono denominate *momenti flettenti*.
- La componente M_z diretta in direzione normale alla sezione è chiamata *momento torcente*.

Le componenti della risultante e del momento risultante delle forze interne nel riferimento locale sono denominate *caratteristiche della sollecitazione*.

Si vogliono ora esporre le relazioni statiche che sussistono fra le tensioni agenti in una sezione e le caratteristiche della sollecitazione. Come sarà chiarito nell'analisi della tensione, la tensione agente su un elemento piano infinitesimo di normale esterna $+\mathbf{k}$, viene rappresentata con il simbolo \mathbf{t}_z , per indicare che la normale esterna alla superficie su cui agisce è orientata come l'asse z. Come mostrato in figura, il vettore tensione \mathbf{t}_z è scomposto nelle sue componenti secondo gli assi cartesiani,:



Sussistono quindi le seguenti relazioni tra le tensioni \mathbf{t}_z agenti su una generica sezione, la loro risultante \mathbf{R} ed il loro momento risultante $\mathbf{M}_{(G)}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + N \mathbf{k} \\ &= \int_A (\tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}) dA \\ \mathbf{M}_{(G)} &= M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \\ &= \int_A (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \wedge (\tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}) dA \\ &= \left(\int_A y \sigma_z dA \right) \mathbf{i} + \left(\int_A (-x \sigma_z) dA \right) \mathbf{j} + \left(\int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

da cui, proiettando sugli assi:

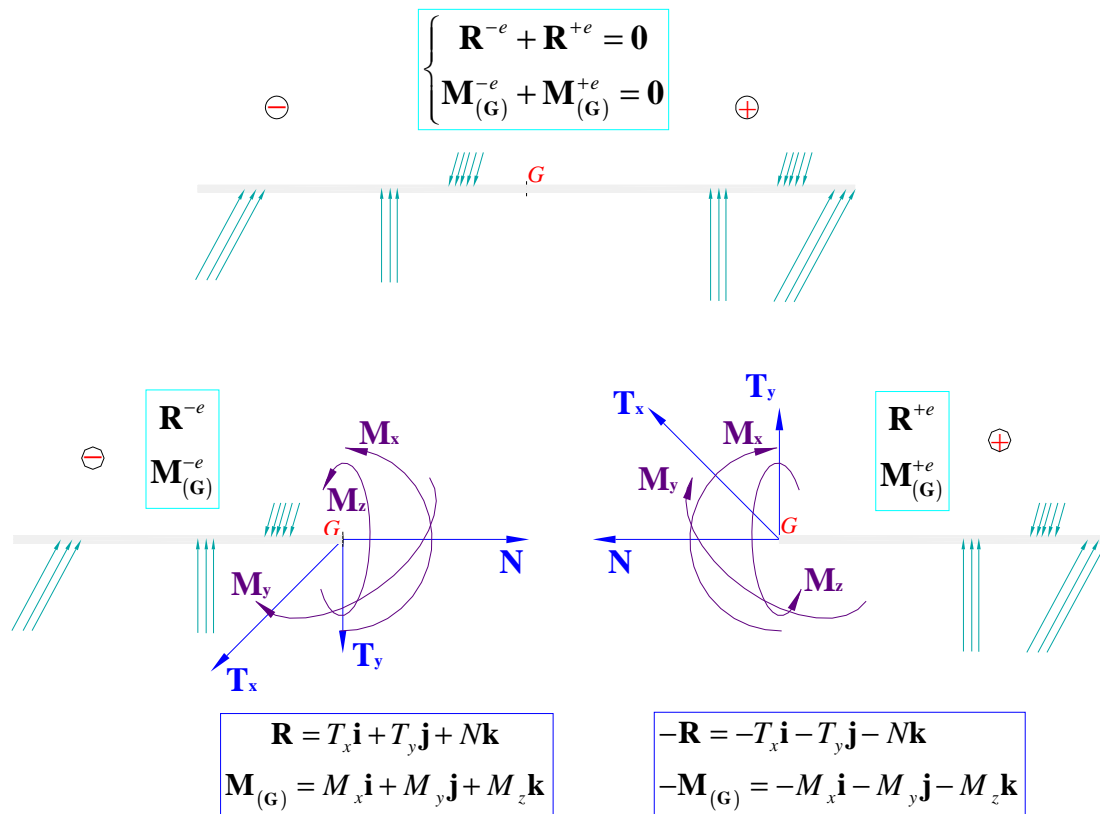
$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA \quad T_y = \int_A \tau_{zy} dA \quad N = \int_A \sigma_z dA$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA \quad M_y = - \int_A x \sigma_z dA \quad M_z = \int_A (x \tau_{zx} - y \tau_{zy}) dA$$

Le relazioni precedenti consentono, note le tensioni agenti sulla sezione, di determinare le caratteristiche della sollecitazione, ma, come è intuitivo, note le caratteristiche della sollecitazione, esse da sole non sono sufficienti per determinare la distribuzione puntuale delle tensioni.

Infatti, la modellazione della trave come corpo rigido adottata in questa prima parte del corso, se sono note tutte le forze esterne attive e reattive a cui la trave è soggetta, permette solo di determinare le caratteristiche della sollecitazione in una sezione generica e non la distribuzione puntuale delle tensioni. Questo risultato, anche se parziale, è comunque di fondamentale importanza nella meccanica delle strutture.

CALCOLO DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE. Consideriamo una trave in equilibrio soggetta ad un sistema di forze esterne note (sia attive che reattive) e rappresentiamola con uno schema statico monodimensionale. Operiamo idealmente un taglio in una generica sezione con baricentro **G**, in modo da isolare due parti complementari denominate **+** e **-** :



Nello schema statico in Figura:

- $\mathbf{R} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + N \mathbf{k}$ è la risultante delle tensioni agenti sulla sezione che ha per normale esterna il versore $+\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_{(G)} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$ è il momento risultante sulla stesse tensioni rispetto al baricentro della sezione.
- Per il principio di azione e reazione le tensioni agenti sulla sezione che ha per normale esterna il versore $-\mathbf{k}$ sono uguali e contrarie alle tensioni sulla sezione che ha per normale esterna il versore $+\mathbf{k}$. Quindi la loro risultante ed il loro momento risultante valgono $-\mathbf{R}$ e $-\mathbf{M}_{(G)}$.
- \mathbf{R}^{+e} è la risultante delle forze esterne agenti sulla parte **+**; $\mathbf{M}^{+e}(\mathbf{G})$ è il momento risultante sulla stesse forze rispetto al baricentro **G**.
- \mathbf{R}^{-e} la risultante delle forze esterne agenti sulla parte **-**; $\mathbf{M}^{-e}(\mathbf{G})$ è il momento risultante sulla stesse forze rispetto al baricentro **G**.

Le caratteristiche della sollecitazione possono essere calcolate imponendo l'equilibrio della parte **(-)**:

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}^{-e} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -T_x \mathbf{i} - T_y \mathbf{j} - N \mathbf{k} = \mathbf{R}^{-e}$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_{(\mathbf{G})}^{-e} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -M_x \mathbf{i} - M_y \mathbf{j} - M_z \mathbf{k} = \mathbf{M}_{(\mathbf{G})}^{-e}$$

o in maniera del tutto equivalente imponendo l'equilibrio della parte **(+)**:

$$-\mathbf{R} + \mathbf{R}^{+e} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + N \mathbf{k} = \mathbf{R}^{+e}$$

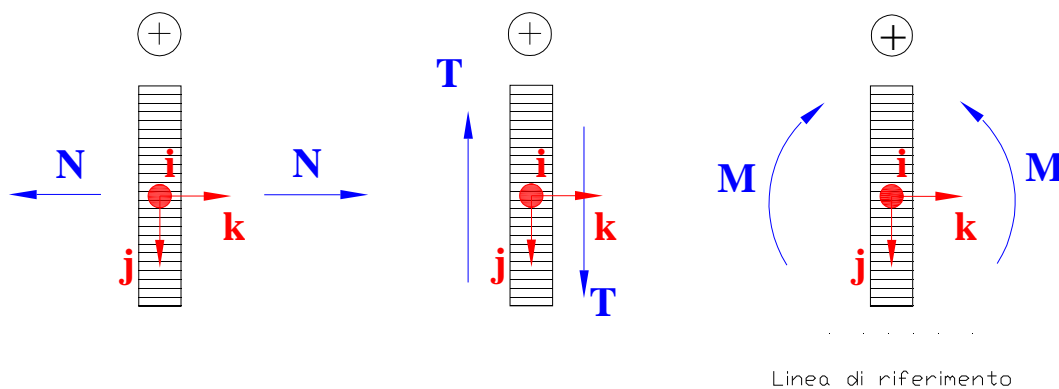
$$-\mathbf{M} + \mathbf{M}_{(\mathbf{G})}^{+e} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} = \mathbf{M}_{(\mathbf{G})}^{+e}$$

L'ultima condizione di equilibrio ci permette di osservare che attraverso la sezione in esame, la parte **+** “*trasmette*” alla parte **-** un sistema di forze interne staticamente equivalente alle forze esterne applicate alla stessa parte **+**.

In modo del tutto analogo possiamo anche osservare che attraverso la sezione in esame, la parte **-** “*trasmette*” alla parte **+** un sistema di forze interne staticamente equivalente alle forze esterne ad essa applicate.

Infine è opportuno notare che l'equilibrio dell'intera trave, gli equilibri delle due parti in cui la trave è idealmente suddivisa e l'equilibrio delle forze interne che le due parti si scambiano (Principio di azione e reazione) non sono proprietà totalmente indipendenti, ma tre qualsiasi di esse implicano la rimanente. Questa circostanza è utile nella verifica dei calcoli svolti.

TRAVI PIANE. Quando il sistema di tutte le forze esterne attive e reattive è dotato di un piano di simmetria che contiene l'asse della trave, le caratteristiche della sollecitazione si possono determinare risolvendo un problema statico piano. In particolare, se orientiamo il sistema di riferimento locale in modo che il piano di simmetria coincida con il piano Oyz possiamo osservare che sono presenti solo le caratteristiche della sollecitazioni indicate in figura, dove è rappresentato un elemento di trave compreso tra due sezioni molto vicine (concio elementare):



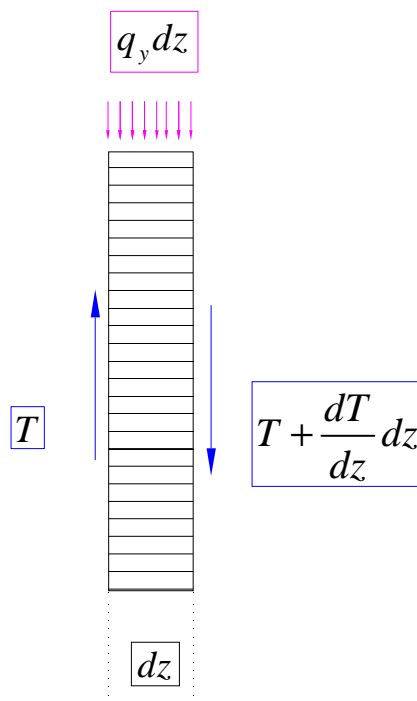
Osserviamo che:

- Lo sforzo normale N è positivo se produce trazione.
- Lo sforzo T_y è positivo se tende a produrre una rotazione oraria dell'elemento su cui agisce (quando il versore \mathbf{i} è rivolto verso l'osservatore).
- Il momento flettente M_x è positivo se tende le fibre dalla stessa parte di una linea di riferimento convenzionale, parallela all'asse della trave e posta nella direzione positiva del versore \mathbf{j} . In generale, in una trave con asse orizzontale la linea di riferimento è verso il basso.

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER LE TRAVI PIANE

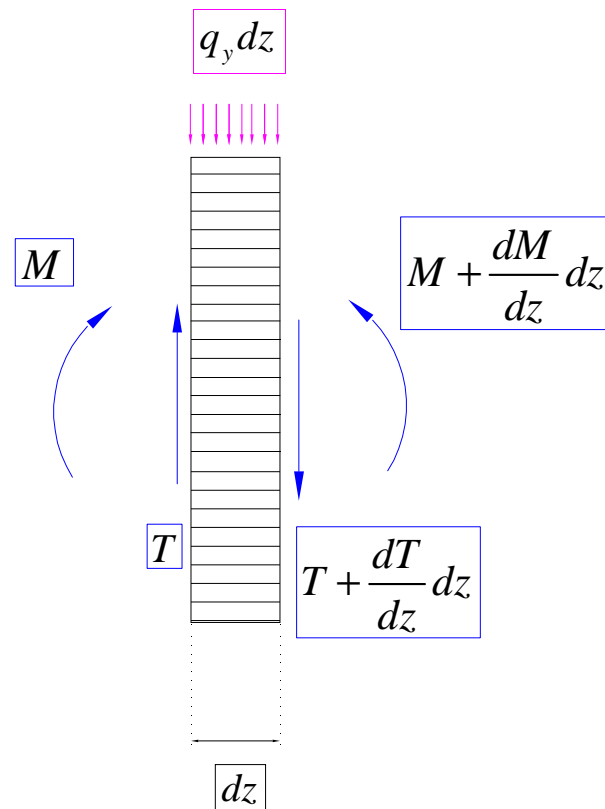
Le equazioni indefinite di equilibrio della trave si ottengono imponendo l'equilibrio di una porzione di trave compresa fra due sezioni poste a distanza infinitesima (concio elementare). In generale si dovrebbe considerare uno schema tridimensionale in cui le forze esterne siano staticamente equivalenti sia ad un carico distribuito che a coppie esterne distribuite. Qui di seguito, per semplicità, queste equazioni sono dedotte solo nel caso particolare di una trave piana, in cui le forze esterne applicate al concio in esame siano staticamente equivalenti solo ad un carico distribuito.

Equazione di equilibrio alla traslazione in senso ortogonale alla linea d'asse



$$\left(T + \frac{dT}{dz} dz \right) - T + q_y dz = 0$$
$$\frac{dT}{dz} + q_y = 0$$

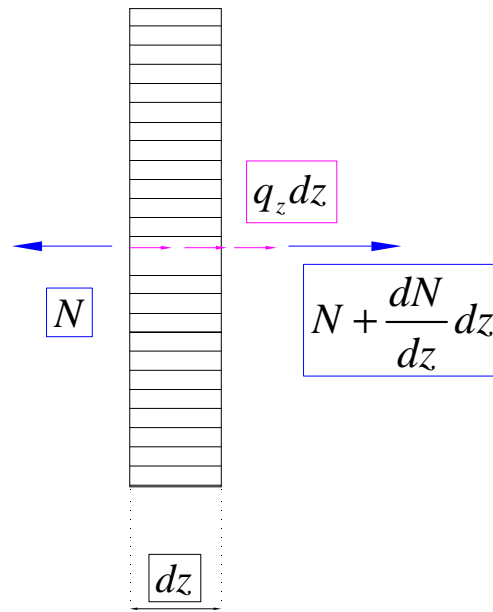
Equazione di equilibrio alla rotazione



$$\left(M + \frac{dM}{dz} dz \right) - M - \left(T + \frac{dT}{dz} dz \right) dz - (q_y dz) \frac{dz}{2} = 0$$

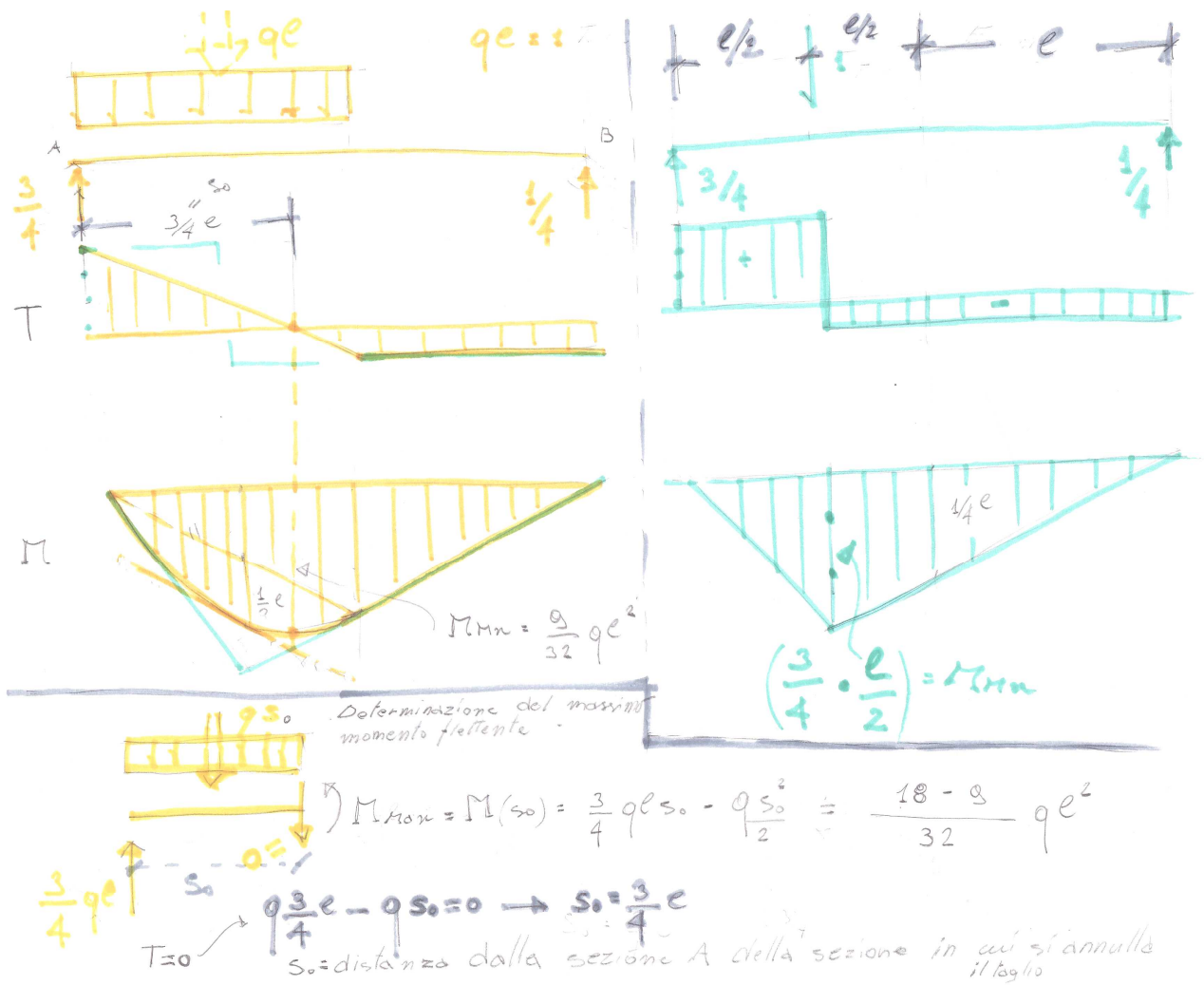
$$\frac{dM}{dz} = T$$

Equazione di equilibrio alla traslazione in senso assiale



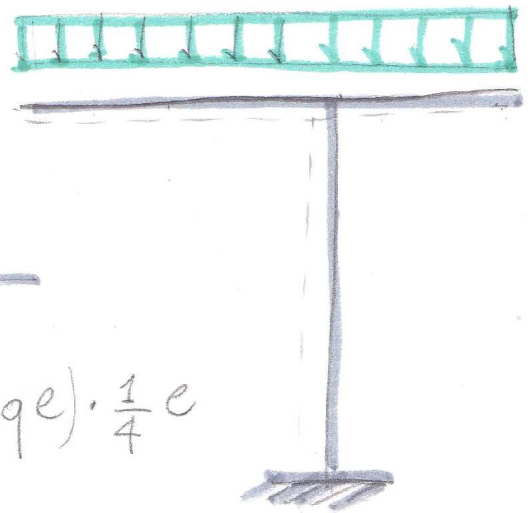
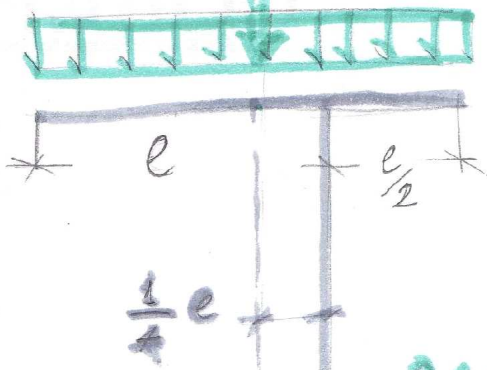
$$\left(N + \frac{dN}{dz} dz \right) - N + q_z dz = 0$$
$$\frac{dN}{dz} + q_z = 0$$

Esercizi



$\frac{3}{2}qe$

Analisi Statica Esterna



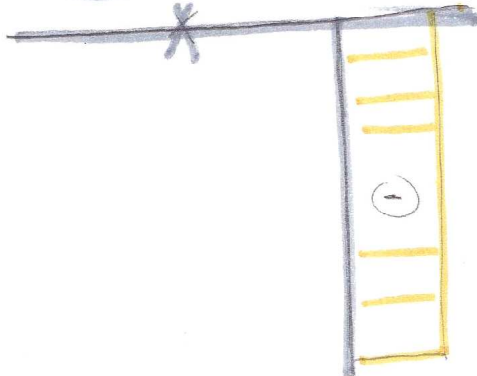
$$\frac{3}{8}qe^2 = \left(\frac{3}{2}qe\right) \cdot \frac{1}{4}e$$

Determinare
le reazioni
vincolari.

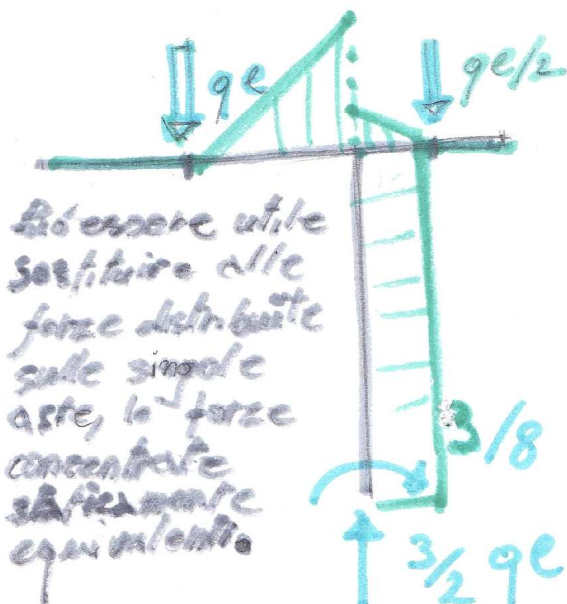
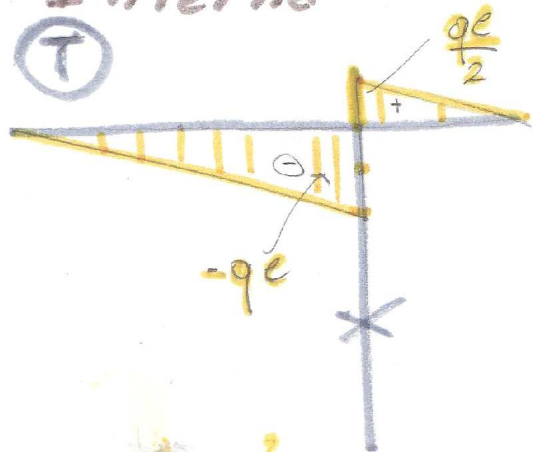
$\frac{3}{2}qe$

Analisi Statica Interna

(N)



(T)

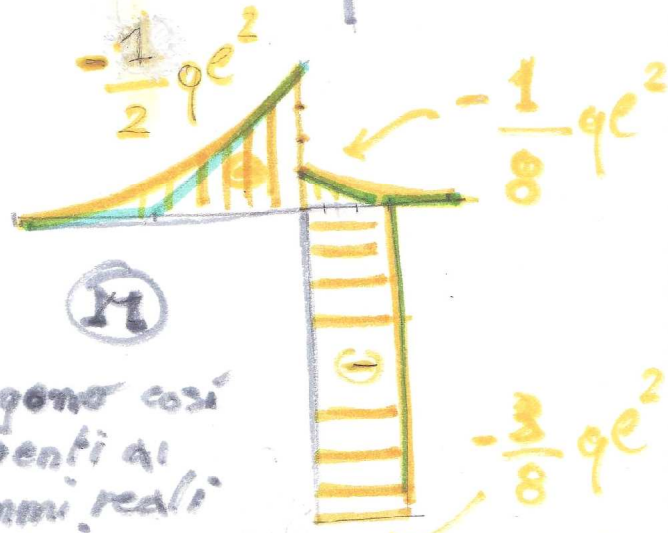


Si è essere utile
sostituire alle
forze distribuite
sulle singole
aste, le forze
concentrate
sufficientemente
equivalenti.

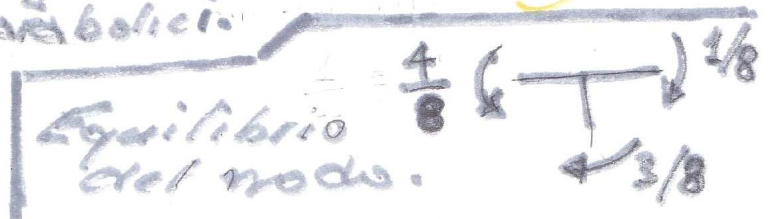
$\frac{3}{8}$

$\frac{3}{2}qe$

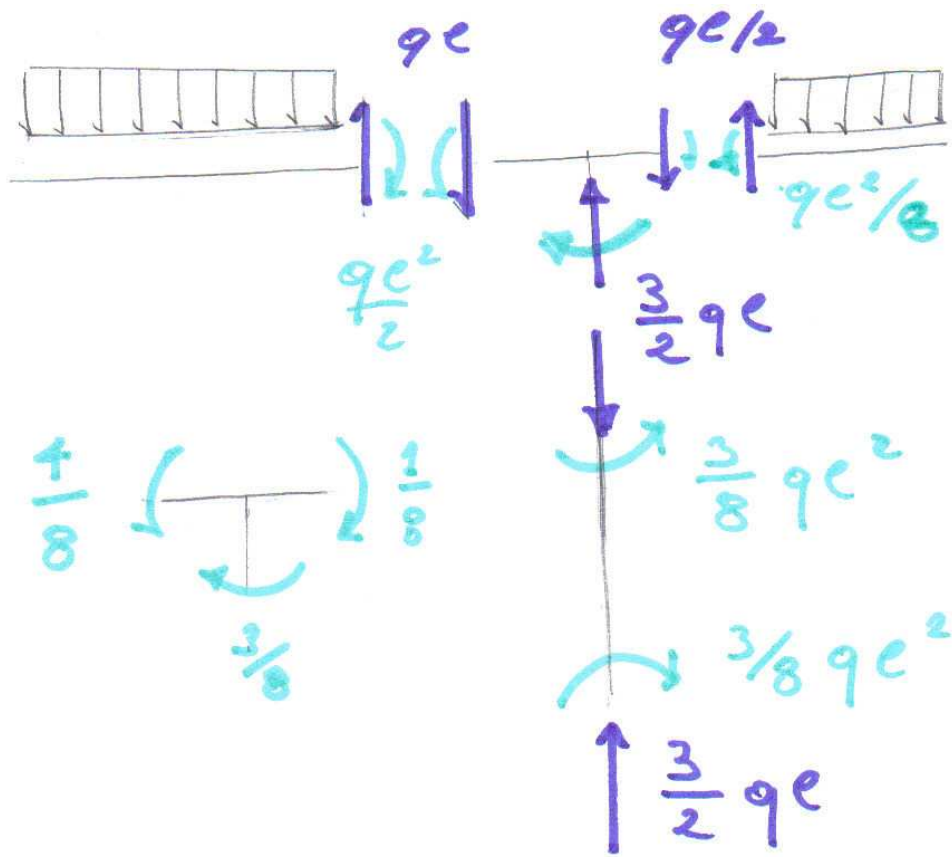
(M)



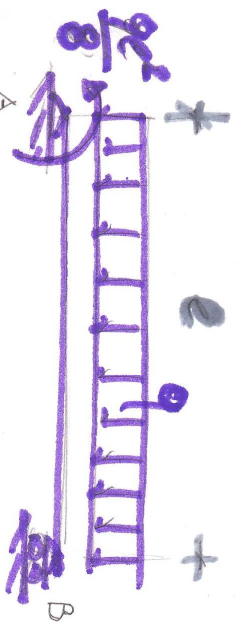
Si ottengono così
le tangenti ai
diagrammi reali
parabolici.



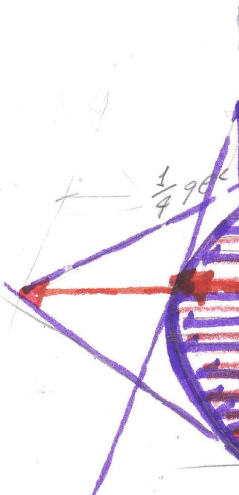
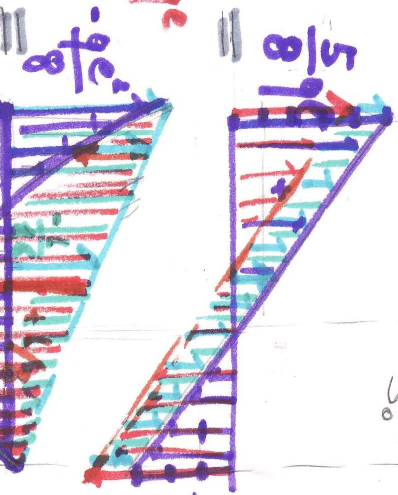
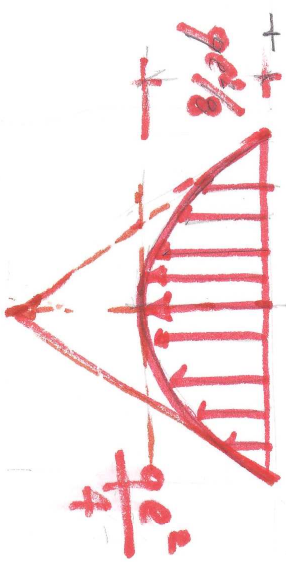
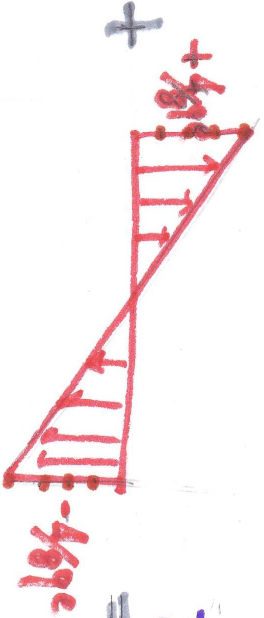
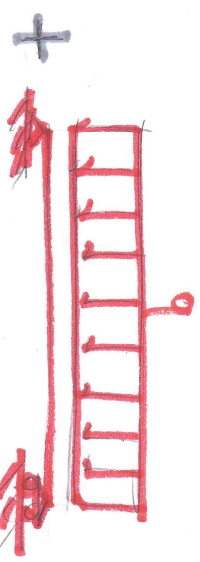
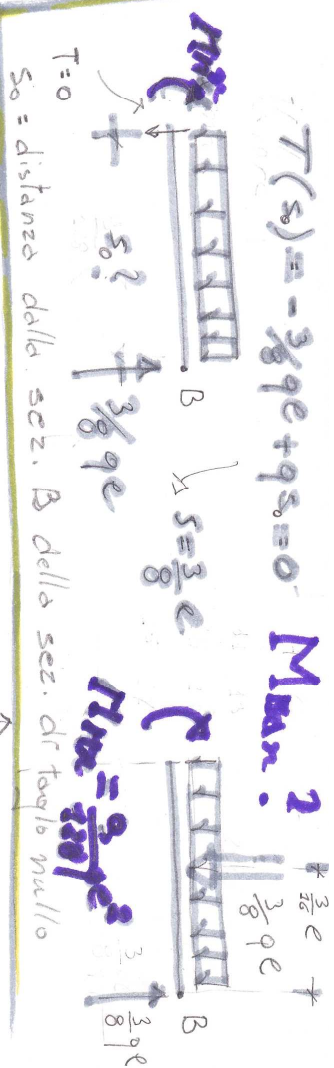
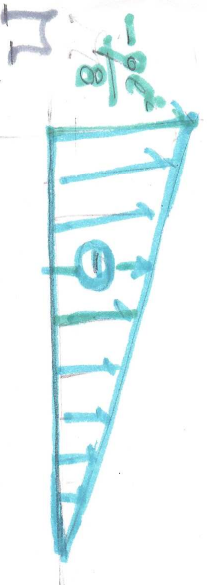
Equilibrio
del nodo.



Equilibrio del nodo



Principio di Sovrapposizione degli effetti



VINCOLI INTERNI

Vedi appunti delle lezioni.....

SISTEMI DI TRAVI LABILI, ISOSTATICI ED IPERSTATICI

Vedi appunti delle lezioni.....

TRAVATURE RETICOLARI

Vedi appunti delle lezioni