APPUNTI

DI

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE
EQUAZIONI COSTITUTIVE
PROBLEMA DI EQUILIBRIO ELASTICO

Prof. ing. Francesco Trentadue

PREMESSE

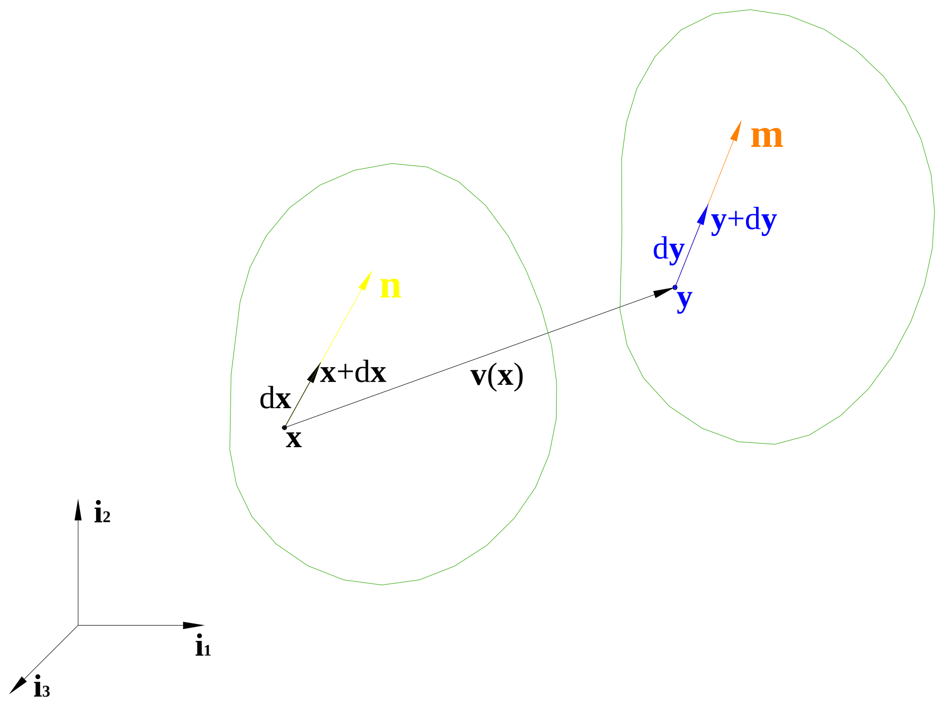
Le sole proposizioni del teorema di Cauchy non sono sufficienti per determinare lo stato di tensione in un corpo solido. L'analisi matematica mostra infatti che la ricerca dello stato di sforzo in un corpo in base a sole condizioni di equilibrio è un problema mal posto, in quanto la sua soluzione è in generale indeterminata. Soprattutto, al di là di ogni considerazione teorica, la nostra esperienza fisica mostra che corpi solidi con identica geometria e soggetti a forze esterne uguali reagiscono in modo diverso se costituiti da materiali diversi.

La sperimentazione mostra infatti che la natura del materiale di cui un corpo è costituito determina una relazione tra lo stato di tensione a cui il corpo è assoggettato e la *deformazione* da esso subita. Solo considerando tale relazione, descritta da *leggi costitutive,* è possibile determinare lo stato di tensione indotto in un corpo dalle azioni assegnate.

Nella prima parte di questi appunti si tratterà della descrizione matematica della deformazione dei corpi e nella parte successiva verranno esaminate delle particolari leggi costitutive, quelle elastiche lineari, che sono le più semplici possibili, ma che comunque costituiscono una valida modellazione del comportamento di molti materiali in molte applicazioni e per questo sono ampiamente utilizzate.

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

SPOSTAMENTO RIGIDO E DEFORMAZIONE PURA Consideriamo un corpo deformabile soggetto ad un campo vettoriale di spostamento *v(x)* che ne cambi la forma e la posizione:



Nello schema in figura:

- ***x*** è la posizione di un generico punto materiale nella configurazione iniziale del corpo***; x+dx*** è la posizione di un punto materiale prossimo a ***x*** nella stessa configurazione; ***dx*** è la fibra materiale che ha per estremi i punti precedenti.

- ***y, y+dy, dy*** individuano le posizioni degli stessi punti materiali e della stessa fibra materiale nella configurazione che il corpo assume a seguito dello spostamento. Sussiste quindi la relazione:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

che in termini scalari si scrive:

$$y_i = x_i + v_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1,2,3).$$

Differenziando la relazione precedente si ottiene:

$$
\begin{aligned}
dy_i &= dx_i + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 \right) \\
&= dx_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \qquad\qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

o, anche, in forma matriciale:

$$
\{d\mathbf{y}\} = \{d\mathbf{x}\} + [\nabla \mathbf{v}]\{d\mathbf{x}\},
$$

dove la matrice:

$$
[\nabla \boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{x}_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{x}_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial \mathrm{x}_3} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial \mathrm{x}_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial \mathrm{x}_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial \mathrm{x}_3} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial \mathrm{x}_1} & \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial \mathrm{x}_2} & \frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial \mathrm{x}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{1,1} & \mathrm{v}_{1,2} & \mathrm{v}_{1,3} \\ \mathrm{v}_{2,1} & \mathrm{v}_{2,2} & \mathrm{v}_{2,3} \\ \mathrm{v}_{3,1} & \mathrm{v}_{3,2} & \mathrm{v}_{3,3} \end{bmatrix}
$$

è denominata *gradiente di spostamento.*

A questo punto, per rendere la formulazione del problema la più semplice possibile, formuliamo l'*ipotesi di piccoli spostamenti*, che può essere accettata in un'ampia parte dei problemi di meccanica dei solidi e delle strutture. In base a questa ipotesi il campo vettoriale di spostamento v(x) soddisfa le seguenti relazioni:

$$
\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^{\,2}} << L_o \qquad\qquad \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 << 1
$$

La prima delle due relazioni richiede che il massimo spostamento dovuto alla deformazione di una struttura, sia piccolo rispetto ad una dimensione L_0 caratteristica della struttura stessa (per esempio, il massimo spostamento di una trave spesso è piccolo rispetto alla sua luce), mentre la seconda relazione, come si chiarirà in seguito, richiede che le rotazioni e le deformazioni siano piccole.

Il gradiente di spostamento prima introdotto si può decomporre in uno ed in un sol modo nella somma della sua parte simmetrica e nella sua parte antisimmetrica:

$$
\begin{aligned}
\nabla \mathbf{v} &= \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{T}\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^{T}\right) \\
&= \qquad \mathbf{E} \qquad + \qquad \mathbf{W}
\end{aligned} ,
$$

dove, se si accetta l'ipotesi di piccoli spostamenti, la parte simmetrica ***E*** del gradiente di spostamento, chiamata *matrice di deformazione infinitesima*, descrive la *deformazione pura* di un elemento infinitesimo di materiale nell'intorno del punto ***x***, mentre la parte antisimmetrica ***W*****,** chiamata *matrice di rotazione infinitesima*, descrive la *rotazione rigida* dello stesso elemento. Le due matrici hanno le seguenti espressioni:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{1,1} & \dfrac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2} & \dfrac{v_{1,3} + v_{3,1}}{2} \\ \dfrac{v_{2,1} + v_{1,2}}{2} & v_{2,2} & \dfrac{v_{2,3} + v_{3,2}}{2} \\ \dfrac{v_{3,1} + v_{1,3}}{2} & \dfrac{v_{3,2} + v_{2,3}}{2} & v_{3,3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} \\ -w_{13} & -w_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{v_{1,2} - v_{2,1}}{2} & \dfrac{v_{1,3} - v_{3,1}}{2} \\ \dfrac{v_{2,1} - v_{1,2}}{2} & 0 & \dfrac{v_{2,3} - v_{3,2}}{2} \\ \dfrac{v_{3,1} - v_{1,3}}{2} & \dfrac{v_{3,2} - v_{2,3}}{2} & 0 \end{bmatrix} ,
$$

Per un noto teorema di algebra, per ogni matrice antisimmetrica $\mathbf{W}$, cioè tale da soddisfare la relazione $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$, esiste sempre uno ed un solo vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che:

$$\forall d\mathbf{x} \in R^3 : \qquad \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{x} = \mathbf{W} d\mathbf{x}$$

Quindi possiamo associare alla matrice $\mathbf{W}$ un vettore di *rotazione infinitesima* $\boldsymbol{\omega}$, che descrive la rotazione rigida di un elemento infinitesimo di materiale in corrispondenza del punto materiale $\mathbf{x}$. E' facile verificare che sussiste le seguente relazione fra le componenti della matrice di rotazione infinitesima ed il vettore di rotazione infinitesima:

$$\begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} \\ -w_{13} & -w_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo quindi infine scrivere la relazione:

$$d\mathbf{y} - d\mathbf{x} = \mathbf{E} d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{x} \,,$$

che mostra come la variazione fra la fibra ***dx*** prima della deformazione e la stessa fibra materiale ***dy*** dopo la deformazione sia dovuta sia alla *deformazione pura* che alla *rotazione locale.*

Anche le componenti della matrice di deformazione pura hanno un preciso significato fisico. In particolare, si mostrerà che dai tre elementi della diagonale principale si deducono le variazioni di lunghezza di fibre materiali disposte secondo gli assi coordinati, mentre dagli elementi fuori diagonale si deducono le variazioni degli angoli formati da queste fibre.

PARAMETRI DELLA DEFORMAZIONE Una volta che in un punto materiale è nota la matrice di deformazione infinitesima ***E***, la deformazione *pura* del materiale in un intorno infinitesimo di quel punto è definita in modo completo e possono calcolarsi delle grandezze caratteristiche della deformazione, dette *parametri di deformazione*, che qui di seguito si espongono:

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE. Consideriamo una generica fibra disposta secondo la direzione iniziale di versore ***n*** e di lunghezza iniziale infinitesima dl_o. A deformazione avvenuta la stessa fibra materiale è in generale disposta secondo una direzione diversa ed ha una diversa lunghezza dl. Definiamo *coefficiente di dilatazione lineare* la quantità adimensionale:

$$\varepsilon_n = \frac{dl - dl_0}{dl_0} \quad ,$$

che misura ***il rapporto fra la variazione di lunghezza della fibra e la sua lunghezza originaria.*** Dimostreremo che risulta:

$$\varepsilon_n = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} n_i n_j$$
$$= \varepsilon_{11} n_1^{\ 2} + \varepsilon_{22} n_2^{\ 2} + \varepsilon_{33} n_3^{\ 2} + 2\varepsilon_{12} n_1 n_2 + 2\varepsilon_{13} n_1 n_3 + 2\varepsilon_{23} n_2 n_3 \quad ,$$

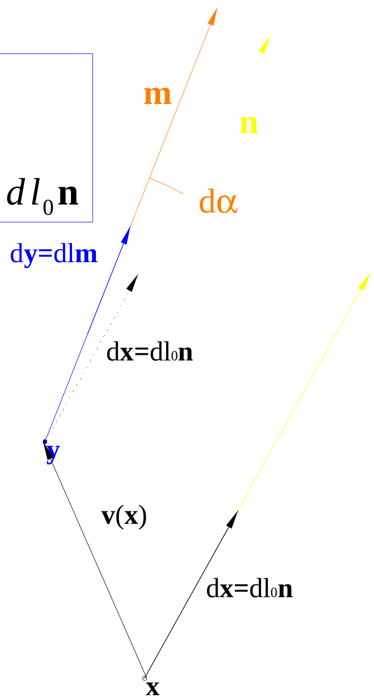
In particolare, se la fibra materiale è parallela ad uno degli assi coordinati, si ha:

$$(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{cases}$$

Quindi gli elementi della diagonale principale della matrice di deformazione infinitesima misurano il rapporto tra le variazioni di lunghezza delle fibre materiali disposte secondo gli assi coordinati e loro lunghezza originarie.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo lo schema in figura, dove è rappresentata una generica fibra materiale prima e dopo la deformazione:

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathbf{y} &= dl\,\mathbf{m} \\ d\mathbf{x} &= dl_0\,\mathbf{n} \\ d\mathbf{y} - d\mathbf{x} &= dl\,\mathbf{m} - dl_0\,\mathbf{n} \end{aligned}}$$



dove:

- il versore $\boldsymbol{n}$ definisce la direzione della fibra e dl_0 la lunghezza della fibra prima della deformazione.
- il versore $\boldsymbol{m}$ definisce la direzione della fibra e dl la lunghezza della fibra a deformazione avvenuta.

Coerentemente all'ipotesi di piccoli spostamenti possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\left(d\mathbf{y}-d\mathbf{x}\right) &= dl\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{m} - dl_0\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} \\ &= dl\cos\left(d\alpha\right) - dl_0 = dl\left(1-\frac{d\alpha^2}{2}+o\left(d\alpha^2\right)\right) - dl_0 \\ &= dl - dl_0 + O\left(d\alpha^2\right) \end{aligned}$$

Poiché inoltre risulta:

$$d\mathbf{y} - d\mathbf{x} = \mathbf{E}d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{x}$$

si ha:

$$\begin{gathered} dl - dl_0 = \\ \mathbf{n} \cdot \left(d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \right) = \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{E}d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{x} \right) \\ = \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{E}dl_0\mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \wedge dl_0\mathbf{n} \right) = dl_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}) \end{gathered} ,$$

dove per le proprietà del prodotto vettoriale misto:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = 0 ,$$

per cui otteniamo:

$$\varepsilon_n = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} .$$

SCORRIMENTO ANGOLARE FRA DUE FIBRE ORTOGONALI. Definiamo *scorrimento angolare* fra due fibre ortogonali di versori $\mathbf{n}_I$ e $\mathbf{n}_{II}$, *la diminuzione* $\gamma_{I\,II}$ *dell'angolo, inizialmente retto, fra le due fibre.* Si dimostra che sussiste la seguente relazione:

$$\gamma_{I\,II} = 2\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}_{II} = 2\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} n_{Ii} n_{IIj}$$

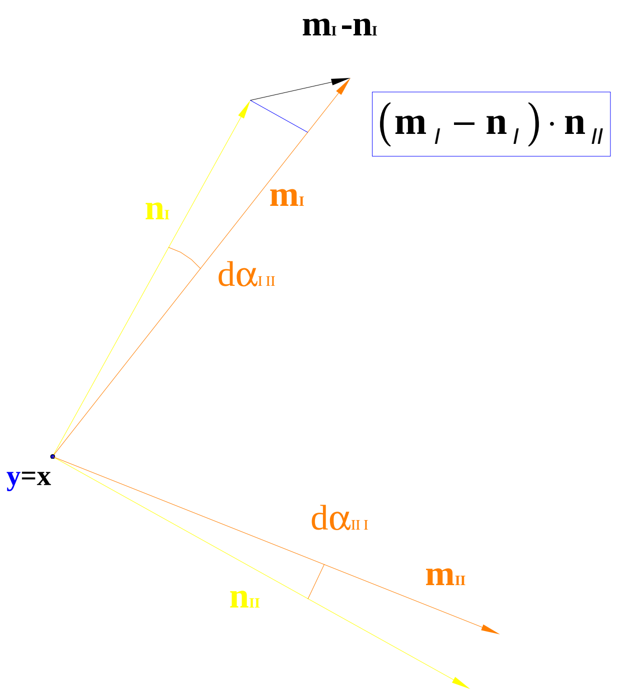
Osserviamo che se le due fibre sono disposte secondo gli assi coordinati, per cui ad esempio risulta:

$$\{\mathbf{n}_I\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

si ottiene:

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = v_{1,2} + v_{2,1}$$

Per cui gli elementi fuori diagonale della matrice di deformazione sono pari alla metà delle diminuzioni di angolo fra fibre disposte secondo gli assi cartesiani.



DIMOSTRAZIONE. *(Facoltativa)* Consideriamo lo schema in figura, dove per semplicità, si è assunto che le lunghezze delle due fibre prima deformazione siano unitarie e che la traslazione del punto materiale in esame sia nulla. Risulta:

$$\gamma_{I\,II} = d\alpha_{I\,II} + d\alpha_{II\,I}$$

Calcoliamo dapprima $d\alpha_{I\,II.}$ Si ha:

$$\mathbf{m}_I - \mathbf{n}_I = \mathbf{E}\mathbf{n}_I + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_I$$

$$d\alpha_{I\,II} \cong \mathrm{t}\,g\left(d\alpha_{I\,II}\right) = \frac{\left(\mathbf{m}_I - \mathbf{n}_I\right) \cdot \mathbf{n}_{II}}{1}$$

$$= \left(\mathbf{m}_I - \mathbf{n}_I\right) \cdot \mathbf{n}_{II} = \left(\mathbf{E}\mathbf{n}_I + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_I\right) \cdot \mathbf{n}_{II}$$

Nello stesso modo si ottiene:

$$d\alpha_{II\,I} = \left(\mathbf{E}\mathbf{n}_{II} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_{II}\right) \cdot \mathbf{n}_I$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \gamma_{I\,II} &= d\alpha_{I\,II} + d\alpha_{II\,I} \\ &= \left(\mathbf{E}\mathbf{n}_I + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_I\right) \cdot \mathbf{n}_{II} + \left(\mathbf{E}\mathbf{n}_{II} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_{II}\right) \cdot \mathbf{n}_I \\ &= \mathbf{E}\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II} + \mathbf{E}\mathbf{n}_{II} \cdot \mathbf{n}_I + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_{II} \cdot \mathbf{n}_I \end{aligned},$$

dove risulta:

$$\mathbf{E}\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II} = \mathbf{E}\mathbf{n}_{II} \cdot \mathbf{n}_I$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{n}_{II} \cdot \mathbf{n}_I$$

e quindi:

$$\gamma_{I\,II} = 2\mathbf{E}\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II}$$

come si voleva dimostrare.

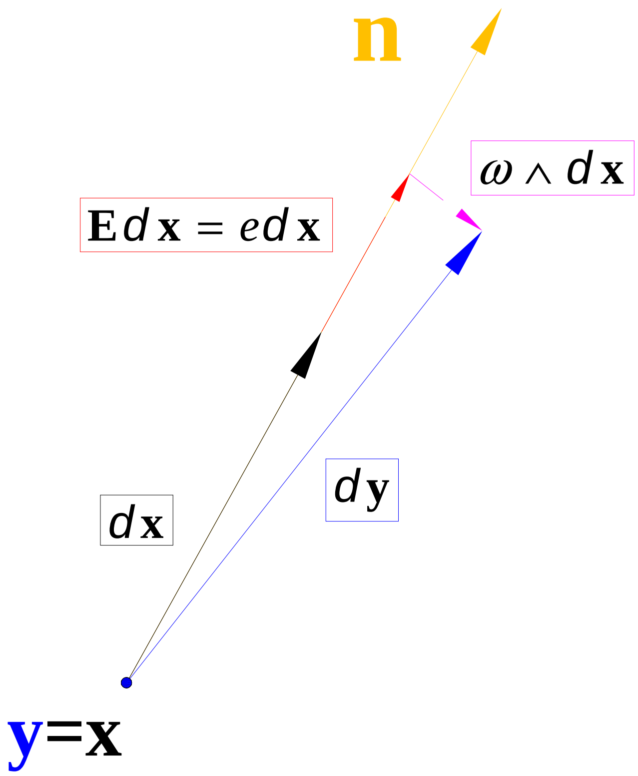
COEFFICIENTE DI DEFORMAZIONE VOLUMETRICA O CUBICA . Definiamo coefficiente di deformazione volumetrica o cubica il rapporto tra la variazione di volume di un elemento infinitesimo di materiale e il suo volume iniziale:

$$\vartheta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

dimostreremo in seguito che risulta:

$$\vartheta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \, .$$

DILATAZIONI E DIREZIONI PRINCIPALI Assegnato un punto materiale, ci chiediamo se esistano per quel punto fibre materiali che *per effetto della sola deformazione pura* rimangono parallele alla loro direzione iniziale, come mostrato in figura (dove per semplicità si è assunto che la traslazione del punto materiale sia nulla):



La figura mostra che una fibra principale, se si considera l'effetto della sola deformazione pura , è mutata in una fibra avente la stessa direzione. Deve perciò risultare:

$$e d\mathbf{x} = \mathbf{E} d\mathbf{x}\,.$$

dove $d\mathbf{x} = dl_0\mathbf{n}$. Otteniamo quindi la relazione:

$$e\mathbf{n} = \mathbf{E}\mathbf{n}$$

dove $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$.

La relazione precedente costituisce un problema di autovalori e di autovettori, formalmente identico a quello già esaminato in analisi della tensione, che può anche porsi nella forma equivalente:

$$(\mathbf{E} - e\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}\,,$$

e può scriversi in termini scalari:

$$
\begin{cases}
(\varepsilon_{11} - e) n_1 + \varepsilon_{12} n_2 + \varepsilon_{13} n_3 = 0 \\
\varepsilon_{21} n_1 + (\varepsilon_{22} - e) n_2 + \varepsilon_{23} n_3 = 0 \\
\varepsilon_{31} n_1 + \varepsilon_{22} n_2 + (\varepsilon_{33} - e) n_3 = 0
\end{cases} .
$$

Affinché il sistema ammetta soluzioni diverse dalla banale, deve essere:

$$
\begin{vmatrix}
(\varepsilon_{11} - e) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\
\varepsilon_{21} & (\varepsilon_{22} - e) & \varepsilon_{23} \\
\varepsilon_{31} & \varepsilon_{22} & (\varepsilon_{33} - e)
\end{vmatrix} = 0
$$

Sviluppando il determinante precedente si determina l'equazione di 3° grado:

$$
e^3 - i_1(\mathbf{E}) e^2 + i_2(\mathbf{E}) e - i_3(\mathbf{E}) = 0 ,
$$

dove i coefficienti dell'equazione prendono il nome di invariante lineare, quadratico e cubico della deformazione:

$$
i_1(\mathbf{E}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}
$$

$$
i_2(\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
i_3(\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}
$$

Anche in questo caso il nome invariante indica che il valore di queste quantità non dipende dalla scelta del riferimento. Analogamente all'analisi della tensione, sussistono le seguenti proprietà:

- Poiché la matrice di deformazione infinitesima $[\mathbf{E}]$ è simmetrica, l'equazione caratteristica ammette sempre soluzioni reali e_I , e_{II} ed e_{III} , chiamate *deformazioni o dilatazioni principali*.

- Alla terna di dilatazioni principali è sempre possibile associare <u>almeno una terna di direzioni principali ortogonali,</u> i cui versori sono gli autovettori di modulo unitario soluzione del problema posto, che saranno indicati con i simboli $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$.

- Scelto un sistema di riferimento orientato secondo la direzione dei versori principali $\mathbf{n}^I, \mathbf{n}^{II}, \mathbf{n}^{III}$ (detto *riferimento principale della deformazione*), la matrice di deformazione infinitesima assume la forma diagonale:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} e_I & 0 & 0 \\ 0 & e_{II} & 0 \\ 0 & 0 & e_{III} \end{bmatrix}$$

- La massima deformazione principale è la deformazione lineare massima fra tutte le fibre materiali per il punto in esame, mentre la minima deformazione principale è la minima deformazione lineari fra tutte le fibre per lo stesso punto.

- Anche gli stati deformativi vengono classificati in monoassiali, piani (biassiali) e triassiali in base al numero delle deformazioni principali non nulle.

- Anche in analisi della deformazione sono possibili costruzioni grafiche (per cui si rimanda ai trattati di S.d.C.) identiche a quelle studiate nell'analisi della tensione.

Consideriamo ora una terna di direzioni principali della deformazione ed isoliamo un elemento infinitesimo di materiale di forma cubica, i cui spigoli siano paralleli alle direzioni principali della deformazione. A deformazione avvenuta, l'elemento cubico si trasforma in un parallelepipedo retto poiché gli spigoli sono paralleli alle direzioni principali della deformazione e gli angoli fra essi rimangono invariati. Se per semplicità consideriamo un elemento cubico di lato unitario, questo subisce a causa della deformazione una variazione di volume pari a:

$$\vartheta = \frac{\Delta V}{1^3} = \left(1+e_I\right)\left(1+e_{II}\right)\left(1+e_{III}\right) - 1 = \left(1+\left(e_I + e_{II} + e_{III}\right) + o(e)\right) - 1$$

da cui:

$$\vartheta = e_I + e_{II} + e_{III} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = i_1(E)$$

CASI NOTEVOLI DI DEFORMAZIONE

ESTENSIONE MONOASSIALE. Assumiamo che il campo di spostamento abbia la seguente espressione:

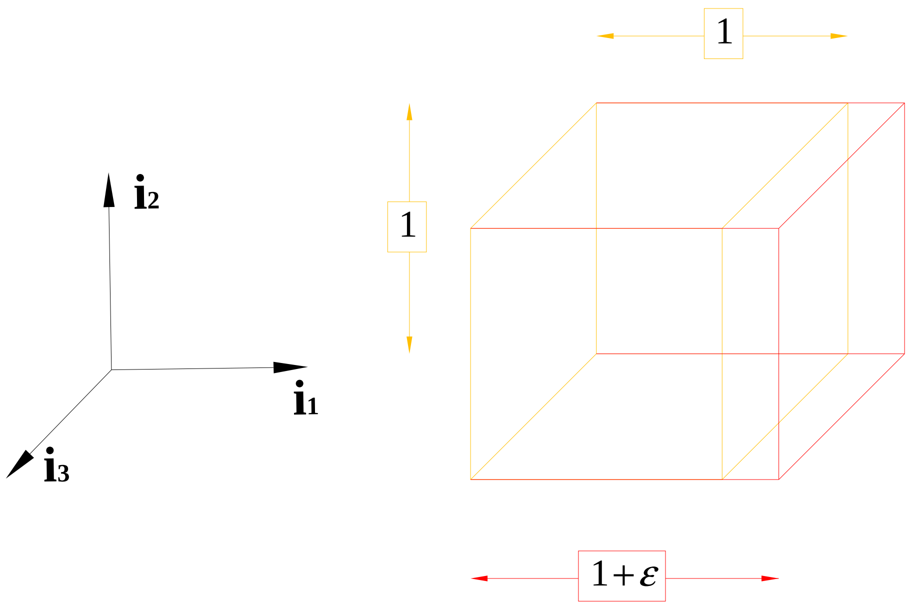
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 = \varepsilon x_1 \mathbf{i}_1 \,,$$

per cui il gradiente di spostamento è:

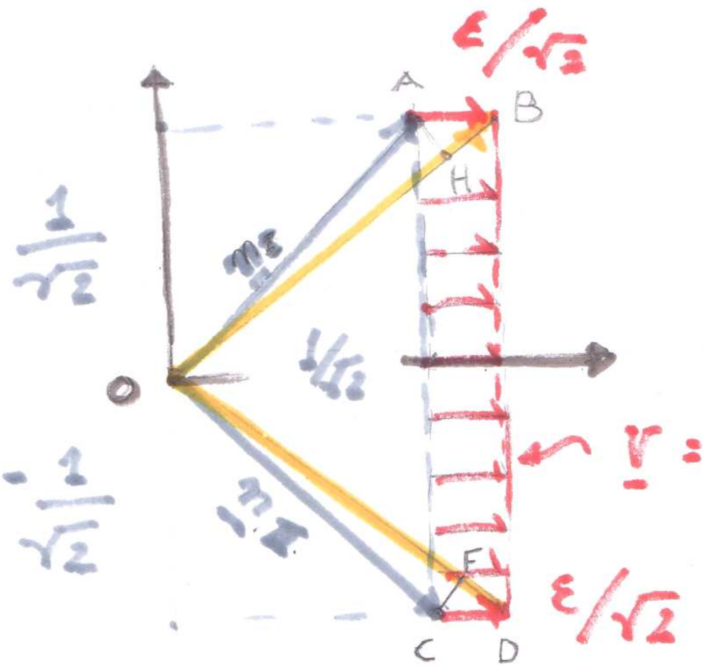
$$[\nabla\mathbf{v}] = [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

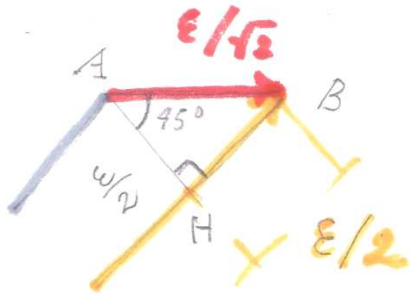
Il gradiente di spostamento, poiché simmetrico, coincide con la matrice di deformazione infinitesima, e quindi la rotazione locale è nulla.

Consideriamo ora l'effetto della deformazione su un elemento cubico di lato unitario, avente gli spigoli paralleli agli assi del riferimento assegnato (che in questo caso è un riferimento principale) , osserviamo che le fibre disposte secondo la direzione dell'asse x_1 subiscono un allungamento ε, quelle disposte secondo gli altri due assi non subiscono alcuna variazione di lunghezza, mentre gli scorrimenti angolari fra gli spigoli del cubetto sono tutti nulli:



E’ interessante calcolare la deformazione assiale e lo scorrimento angolare relativi ad una coppia di fibre ortogonali di lunghezza unitaria $\mathbf{n}_I = 1/\sqrt{2}\mathbf{i}_1 + 1/\sqrt{2}\mathbf{i}_2$ ed $\mathbf{n}_I = 1/\sqrt{2}\mathbf{i}_1 - 1/\sqrt{2}\mathbf{i}_2$, formanti un angolo di 45° rispetto al versore $\mathbf{i_1}$**:**





Risulta:

$$\varepsilon_{nI} = \mathbf{n}_I \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}_I = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} n_{Ii} n_{Ij} = \varepsilon \left(1/\sqrt{2}\right)^2 = \varepsilon / 2$$

$$\varepsilon_{nII} = \varepsilon_{nI} .$$

Questo risultato può ottenersi anche osservando che, per l’ipotesi di piccoli spostamenti, ad esempio risulta:

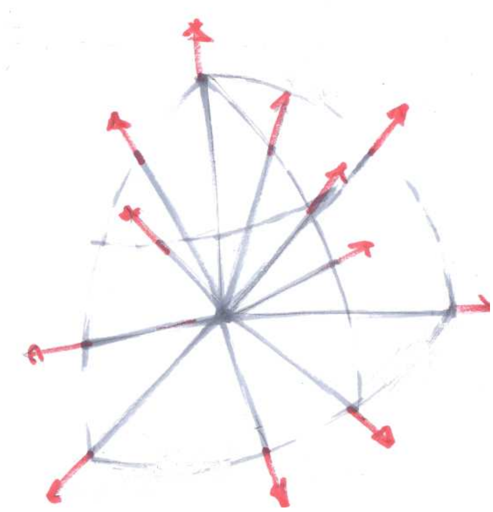
$$\varepsilon_{nI} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AO}} = \frac{\varepsilon / 2}{1} = \varepsilon / 2 .$$

Lo scorrimento fra le due fibre $\boldsymbol{n_I}$ ed $\boldsymbol{n_{II}}$ è invece:

$$\gamma_{I\,II} = 2\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}_{II} = 2\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} n_{Ii} n_{IIj} = 2\varepsilon \left(1/\sqrt{2}\right)\left(1/\sqrt{2}\right) = \varepsilon$$

Anche questo risultato si ottiene in base a semplici considerazioni geometriche:

$$\gamma_{I\,II} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HO}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{FO}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



ESTENSIONE UNIFORME. Assumiamo che il campo di spostamento abbia la seguente espressione:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{x} = \varepsilon \left(x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 \right),$$

per cui il gradiente di spostamento è:

$$[\nabla \mathbf{v}] = [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \varepsilon [\mathbf{I}].$$

Questo, poiché simmetrico, coincide con la matrice di deformazione infinitesima e quindi la rotazione locale è nulla per ogni elemento di materiale.

E' interessante calcolare la deformazione assiale di una fibra generica $\boldsymbol{n}$ e lo scorrimento angolare relativo ad una coppia generica di fibre ortogonali $\boldsymbol{n_I}$ ed $\boldsymbol{n_{II}}$. Osserviamo che:

- comunque si scelga una fibra in direzione $\boldsymbol{n}$ risulta:

$$\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E n} = \mathbf{n} \cdot \left(\varepsilon \mathbf{I} \right) \mathbf{n} = \varepsilon \left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2} \right) = \varepsilon$$

- comunque si scelgano due fibre ortogonali di versori $\boldsymbol{n_I}$ ed $\boldsymbol{n_{II}}$ risulta:

$$\gamma_{I\,II} = 2\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{E n}_{II} = 2\mathbf{n}_I \cdot \left(\varepsilon \mathbf{I} \right) \mathbf{n}_{II} = 2\varepsilon \left(n_{I1} n_{II1} + n_{I2} n_{II2} + n_{I3} n_{II3} \right) = 0$$

SCORRIMENTO SEMPLICE. Consideriamo il campo di spostamento:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_1 = \gamma x_2 \mathbf{i}\,,$$

da cui :

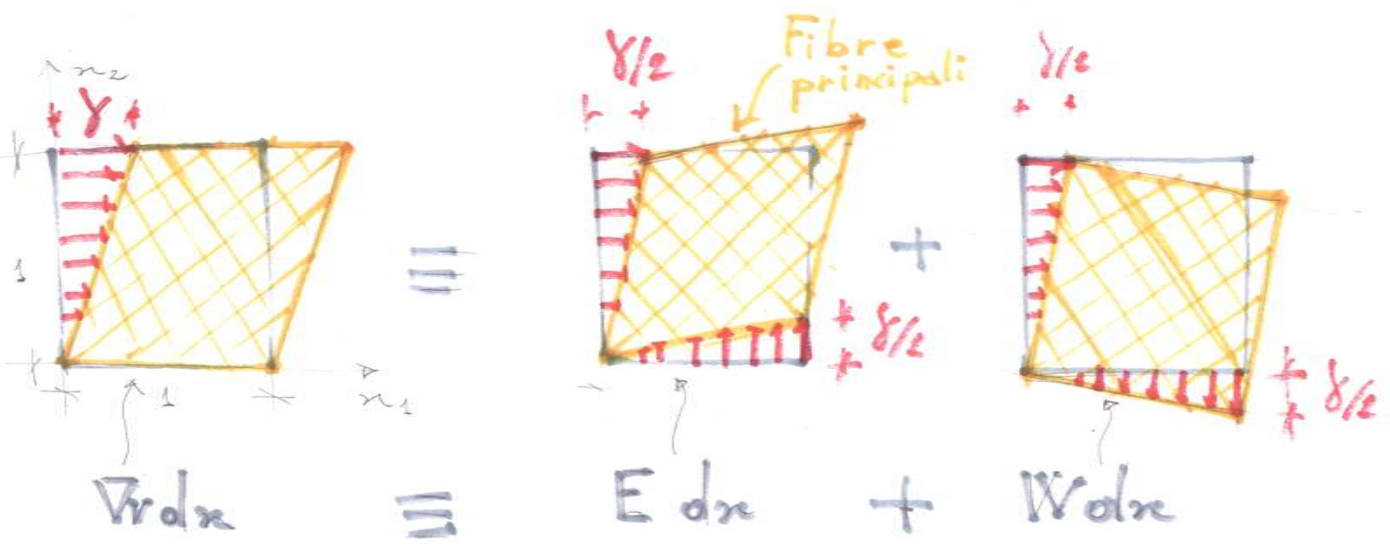
$$[\nabla\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{E}] + [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove poiché risulta:

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0_1 & 0 \end{bmatrix}$$

la parte antisimmetrica del gradiente di spostamento descrive una rotazione rigida oraria attorno all'asse 3 pari a $-\gamma/2$. In questo caso quindi un elemento cubico di lato unitario, avente gli spigoli paralleli agli assi del riferimento, subisce sia una deformazione pura che una rotazione rigida, come mostrato in figura:



Ricerchiamo ora le fibre che, *per effetto della sola deformazione pura,* rimangono parallele a se stesse. Queste, come è noto si determinano risolvendo il problema di autovalori ed autovettori:

$$\begin{bmatrix} -e & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & -e & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

dove gli invariante lineare, quadratico e cubico risultano pari a:

$$i_1(\mathbf{E}) = 0 \qquad i_2(\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\gamma/2\right)^2 \qquad i_3(\mathbf{E}) = 0 \quad .$$

L'equazione di Laplace diventa:

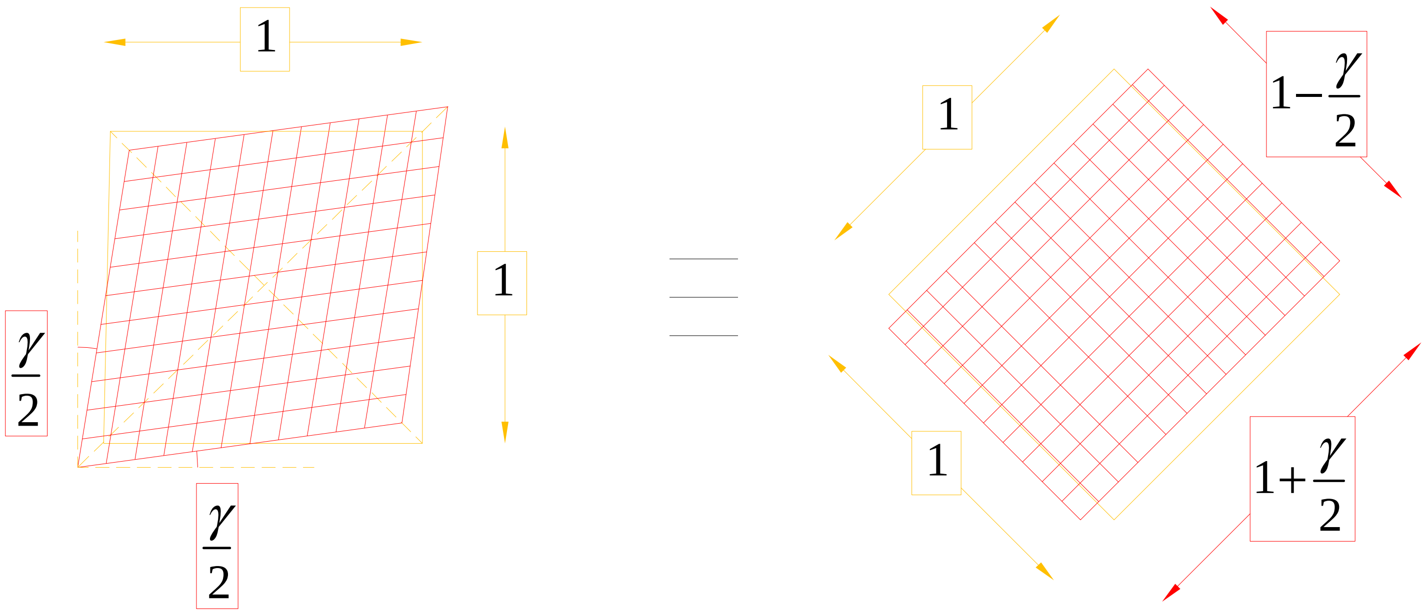
$$s^3 - \left(\gamma/2\right)^2 s = s\left(s^2 - \left(\gamma/2\right)^2\right) = 0$$

ed infine si ottiene:

$$e_I = \gamma/2 \quad \left\{\mathbf{n}^I\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad e_{II} = -\gamma/2 \quad \left\{\mathbf{n}^{II}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad e_{III} = 0 \quad \left\{\mathbf{n}^{III}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Quindi una deformazione di scorrimento puro equivale alla sovrapposizione di una di estensione semplice monoassiale e una contrazione semplice monoassiale uguale e contraria alla precedente, entrambe con assi inclinati di 45° rispetto ai piani coordinati.

Nella figura che segue è rappresentato l'effetto di questa deformazione su un elemento cubico di lato unitario avente gli spigoli paralleli agli assi cartesiani e su un elemento cubico avente gli spigoli paralleli alle direzioni principali:



La matrice di deformazione nel riferimento principale assume la forma:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

EQUAZIONI DI CONGRUENZA. Mentre è sempre possibile assegnare un campo di spostamento regolare e determinare da questo il conseguente campo di deformazione *congruente*:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T\right),$$

non sempre è possibile l'operazione contraria. Affinché, una volta assegnato un campo di deformazione, sia possibile determinare un campo di spostamento ad esso *congruente*, devono essere soddisfatte le seguenti equazioni, dette di *congruenza* o di *compatibilità:*

$$\varepsilon_{hi,jk} + \varepsilon_{hj,ik} = \varepsilon_{jk,hi} + \varepsilon_{ik,hj}$$

$$h,i,j,k = 1,2,3$$

TEOREMA. Un campo di spostamento infinitesimo è rigido e quindi risulta:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$$

se e solo se la matrice di deformazione $\mathbf{E}$ è ovunque nulla.

EQUAZIONI COSTITUTIVE ELASTICHE LINEARI

L'esperienza fisica mostra che corpi solidi con uguale geometria e soggetti a forze uguali reagiscono in modo diverso se costituiti da materiali diversi. E' perciò necessario ricercare una descrizione matematica della risposta meccanica dei diversi materiali, formulando delle leggi *costitutive,* cioè delle relazioni analitiche tra stato di tensione e deformazione subita da un elemento di materiale. In generale, le leggi costitutive possono descrivere comportamenti dei materiali assai diversi. Esse comunque devono sottostare i seguenti principi generali:

- Esiste sempre una relazione tra lo stato di tensione attuale e la *storia di deformazione* subita da un materiale (*Principio di determinismo*).

- Generalmente si accetta che lo stato di tensione in una parte infinitesima di un corpo dipenda solo dalla deformazione subita da quella stessa parte infinitesima (*Principio di azione locale).*

- Universalmente si accetta che gli spostamenti rigidi non producano stati di sforzo in un corpo solido (*Principio di obbiettività).* Per questo motivo l'analisi della deformazione distingue fra grandezze che descrivono la *deformazione pura* di un elemento infinitesimo di materiale e grandezze che ne descrivono lo *spostamento rigido*.

Legge di Hooke generalizzata L'ipotesi costitutiva più semplice che si possa formulare è quella *lineare elastica,* espressa dalla *Legge di Hooke generalizzata,* che prevede che ogni componente di tensione dipenda linearmente da ogni componente di deformazione:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{hi} &= A_{hi11}\varepsilon_{11} + A_{hi22}\varepsilon_{22} + A_{hi33}\varepsilon_{33} + A_{hi12}\varepsilon_{12} \\
&+ A_{hi21}\varepsilon_{21} + A_{hi13}\varepsilon_{13} + A_{hi31}\varepsilon_{31} + A_{hi23}\varepsilon_{23} + A_{hi32}\varepsilon_{32} \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} A_{hijk}\varepsilon_{jk}
\end{aligned},
$$

dove, per la simmetria delle matrici di tensione e deformazione, deve risultare:

$$
\begin{aligned}
A_{hijk} &= A_{hikj} \\
A_{hijk} &= A_{ihjk}
\end{aligned}.
$$

L'ipotesi di elasticità (locale) prevede quindi che lo stato di tensione in un punto materiale dipenda solo dall'attuale stato di deformazione nello stesso punto. Si assume quindi che esso sia indipendente sia dalla precedente storia di deformazione, sia dalla velocità di deformazione.

I coefficienti A_{hijk} prendono il nome di *costanti di elasticità*. La legge costitutiva elastica si può esprimere in modo assai più sintetico in forma *tensoriale:*

$$
\mathbf{T} = \mathbf{A}[\mathbf{E}],
$$

dove il tensore del quart'ordine **A** è chiamato tensore di *elasticità*. La relazione precedente può essere invertita è può perciò scriversi in maniera equivalente nella forma:

$$
\mathbf{E} = \mathbf{C}[\mathbf{T}]
$$

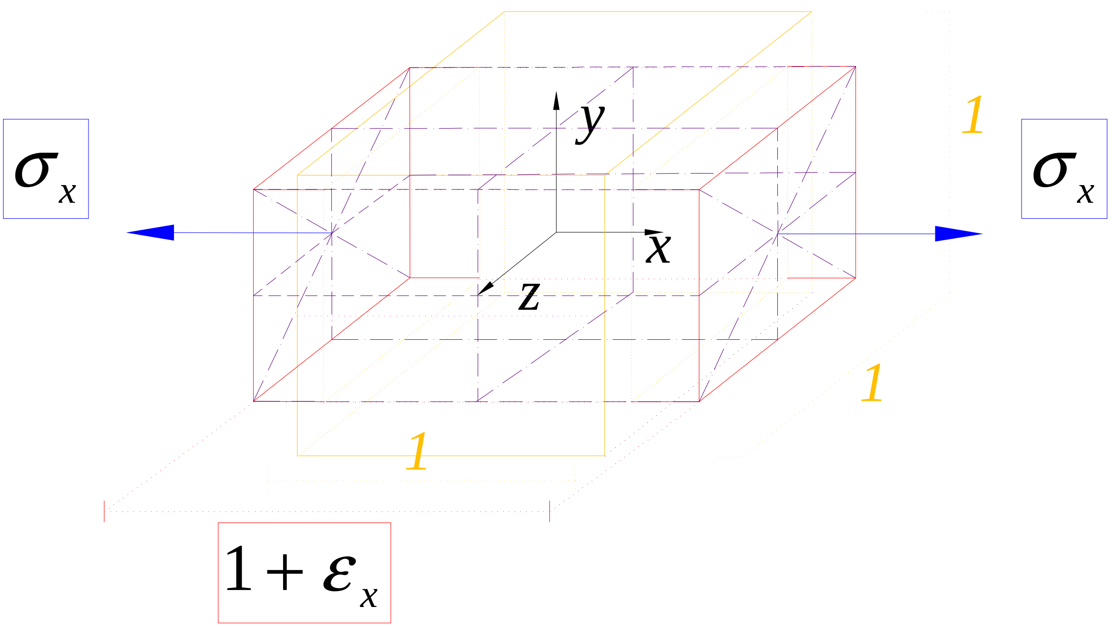
ed in componenti:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{hi} &= C_{hi11}\sigma_{11} + C_{hi22}\sigma_{22} + C_{hi33}\sigma_{33} + C_{hi12}\sigma_{12} \\
&+ C_{hi21}\sigma_{21} + C_{hi13}\sigma_{13} + C_{hi31}\sigma_{31} + C_{hi23}\sigma_{23} + C_{hi32}\sigma_{32} \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} C_{hijk}\sigma_{jk}
\end{aligned}.
$$

<u>Materiali elastici lineari isotropi</u> Il caso più semplice di legame costitutivo elastico lineare è quello in cui il materiale è isotropo, cioè non presenta alcuna direzione privilegiata o comunque distinguibile dalla altre. In questa ipotesi, se si considera lo spazio geometrico completamente occupato dal materiale, qualunque piano può considerarsi di *simmetria materiale*, poiché la risposta meccanica del materiale è invariante rispetto ad una riflessione del materiale (fisicamente irrealizzabile, quindi virtuale) rispetto allo stesso piano.

Come già noto dall'analisi della tensione, un generico stato di tensione può sempre pensarsi come sovrapposizione di tre stati tensionali monoassiali ortogonali, con assi secondo le direzioni principali della tensione. L'ipotesi di elasticità lineare permette quindi di studiare singolarmente le deformazioni indotte da ciascuno dei tre stati monoassiali e di determinare successivamente la deformazione totale sovrapponendo le deformazioni relative a ciascuno dei tre stati.

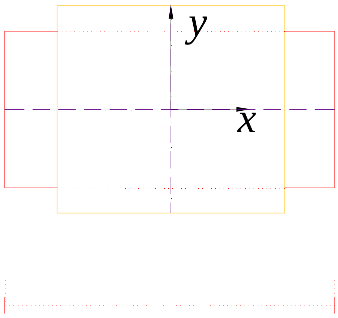
Consideriamo l'elemento di materiale rappresentato in Figura, costituito da un cubo di lato unitario sottoposto ad uno stato di sforzo monoassiale diretto secondo l'asse x.
In Figura è rappresentato in giallo l'elemento prima della deformazione ed in rosso l'elemento dopo la deformazione. Per isotropia tutti gli elementi piani tratteggiati devono essere piani di simmetria per il sistema sia prima che dopo la deformazione.



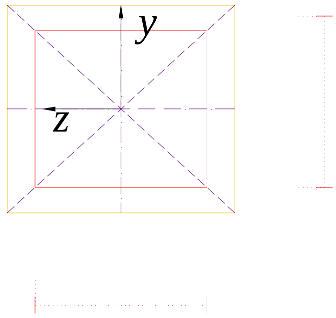
Evitando per brevità una trattazione analitica rigorosa, possiamo riconoscere che l'unica deformazione compatibile con le simmetrie del sistema è un'estensione monoassiale secondo l'asse x, sovrapposta ad una deformazione piana uniforme ortogonale all'asse x.

Ogni altro tipo di deformazione violerebbe le simmetrie del sistema. L'esperienza fisica mostra inoltre che per i materiali naturali la deformazione laterale è sempre una contrazione uniforme.

Lo schema precedente può anche essere rappresentato in proiezione ortogonale:



$$\boxed{1+\varepsilon_x}$$



$$\boxed{1+\varepsilon_y = 1-\nu\varepsilon_x}$$

$$\boxed{1+\varepsilon_z = 1-\nu\varepsilon_x}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\varepsilon_x^{(\sigma_x)} = \frac{1}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_y^{(\sigma_x)} = -\nu\varepsilon_x^{(\sigma_x)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_z^{(\sigma_x)} = -\nu\varepsilon_x^{(\sigma_x)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_x$$

Poiché il materiale è isotropo, uno stato di tensione monoassiale con asse ***y*** produce una risposta meccanica del materiale identica al caso precedente (ma ruotata di 90°), cioè produce una deformazione assiale con asse ***y*** sovrapposta ad una contrazione laterale uniforme nel piano ortogonale allo stesso asse:

$$\varepsilon_x^{(\sigma_y)} = -\nu\varepsilon_y^{(\sigma_y)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y^{(\sigma_y)} = \frac{1}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_z^{(\sigma_y)} = -\nu\varepsilon_y^{(\sigma_y)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_y$$

dove per isotropia le costanti elastiche E e ν non dipendono dalla direzione dello sforzo. Considerando infine uno sforzo diretto secondo l'asse z si ottiene:

$$\varepsilon_x^{(\sigma_z)} = -\nu\varepsilon_z^{(\sigma_z)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y^{(\sigma_z)} = -\nu\varepsilon_z^{(\sigma_z)} = \frac{-\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z^{(\sigma_z)} = \frac{1}{E}\sigma_z$$

Per cui, sovrapponendo gli effetti dei tre stati monoassiali considerati:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(\sigma_x)} + \varepsilon_x^{(\sigma_y)} + \varepsilon_x^{(\sigma_z)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(\sigma_x)} + \varepsilon_y^{(\sigma_y)} + \varepsilon_y^{(\sigma_z)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^{(\sigma_x)} + \varepsilon_z^{(\sigma_y)} + \varepsilon_z^{(\sigma_z)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

Le tre relazioni precedenti definiscono in modo completo la risposta elastica del materiale solo nel caso in cui le tensioni applicate sui piani coordinati siano tensioni normali, quindi solo nel caso in cui i piani coordinati siano piani principali. Nel caso generale, quando sugli elementi piani coordinati sono presenti anche tensioni tangenziali, si può mostrare che il materiale, in accordo con l'ipotesi di isotropia, e quindi in accordo con le simmetrie del problema, deve sviluppare gli scorrimenti angolari:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

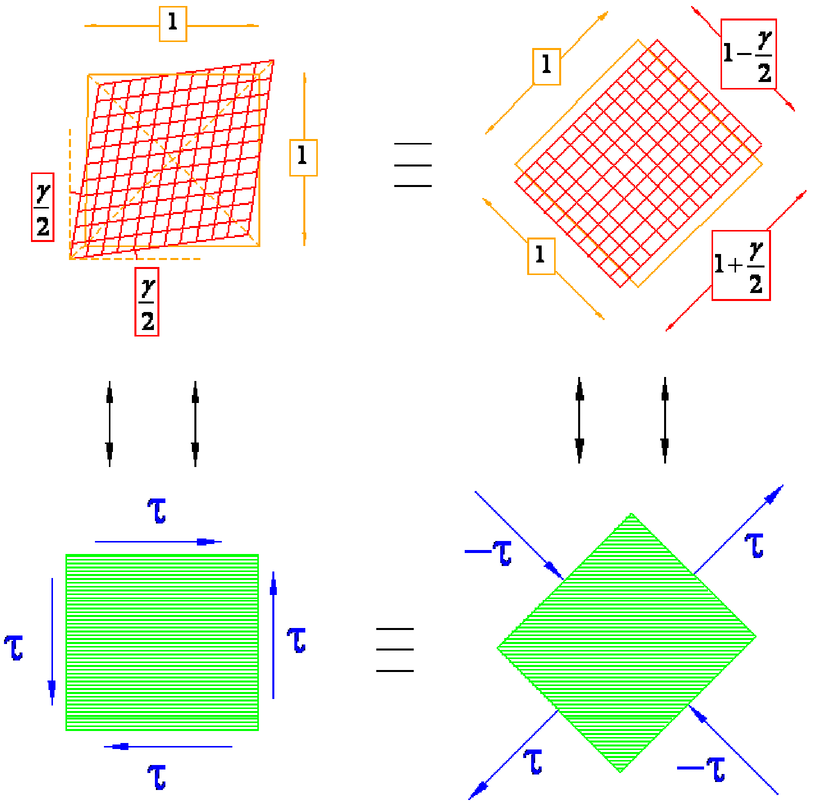
in cui compare il modulo di elasticità tangenziale G, che è quindi il ***rapporto fra la tensione tangenziale applicata ed il conseguente scorrimento***.

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\tau_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}}$$

Le tre costanti di elasticità E, G, e ν non sono indipendenti ma sussiste la relazione

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Nella figura che segue, in cui si analizza l'effetto di uno stato di taglio puro, è riportato lo schema che permette di dimostrare la precedente relazione e la corrispondenza fra taglio puro e scorrimento puro:



$$\gamma/2 = \varepsilon_I = \frac{1}{E}\left[\tau - \nu(-\tau)\right]$$

$$-\gamma/2 = \varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left[-\tau - \nu\tau\right]$$

$$\varepsilon_{III} = \frac{-\nu}{E}\left[\tau - \tau\right] = 0$$

$$\gamma = \frac{2}{E}(1+\nu)\tau$$

Forma matriciale delle equazioni costitutive dei materiali elastici isotropi Le equazioni costitutive di un materiale elastico isotropo lineare , già introdotte nel precedente paragrafo, possono scriversi nella forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_x - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xy}; \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xz}; \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{yz}$$

Riconosciamo quindi che esse possono essere poste nella forma generale:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij} - \nu\, tr\left(\mathbf{T}\right)\delta_{ij}\right]$$

$$i,j=1,2,3$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kroenecker. Quindi le equazioni costitutive possono essere riassunte nell'unica relazione matriciale (o tensoriale):

$$\mathbf{E} = \frac{\left(1+\nu\right)}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu\, tr\left(\mathbf{T}\right)}{E}\mathbf{I}$$

che può essere invertita in modo relativamente semplice.

Modulo di elasticità volumetrica Dalla precedente relazione si deduce che la traccia della matrice di tensione è legata alla traccia della matrice di deformazione dalla relazione:

$$
\begin{aligned}
tr(\mathbf{E}) &= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,tr(\mathbf{T}) - \nu\, tr(\mathbf{T})\,tr(\mathbf{I})\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,tr(\mathbf{T}) - 3\nu\, tr(\mathbf{T})\right] \\
&= \frac{1}{E}(1-2\nu)\,tr(\mathbf{T})
\end{aligned}
$$

e quindi risulta:

$$
tr(\mathbf{T}) = \frac{E}{(1-2\nu)}\,tr(\mathbf{E})
$$

Come è noto dall'analisi della tensione, la traccia della matrice di tensione è invariante rispetto al sistema di riferimento scelto e misura la *componente idrostatica* della tensione. In particolare in uno stato di tensione idrostatico, dove viene esercitata la pressione *p*, risulta:

$$
tr(\mathbf{T}) = tr(p\mathbf{I}) = p\,tr(\mathbf{I}) = 3p \, ,
$$

Come già anticipato nell'analisi della deformazione, la traccia della matrice di deformazione è invariante rispetto al sistema di riferimento adottato e misura la variazione di volume di un elemento materiale di volume unitario:

$$
\vartheta = tr(\mathbf{E}) \, ,
$$

quindi risulta:

$$
p = \frac{E}{3(1-2\nu)}\,\vartheta = K\vartheta
$$

dove K è denominato *modulo di elasticità volumetrica* e misura il quindi rapporto tra pressione idrostatica applicata e deformazione volumetrica di un elemento di materiale.

Forma inversa delle equazioni costitutive L'equazione costitutiva di un materiale lineare isotropo può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{(1+\nu)}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu\, tr(\mathbf{T})}{E}\mathbf{I} \\ &= \frac{(1+\nu)}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu}{(1-2\nu)} tr(\mathbf{E})\mathbf{I}\end{aligned}$$

e perciò giungiamo facilmente alla forma inversa:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{E}{(1+\nu)}\left[\mathbf{E} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} tr(\mathbf{E})\mathbf{I}\right] \\ &= 2G\mathbf{E} + \lambda tr(\mathbf{E})\mathbf{I}\end{aligned}.$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale e la costante elastica λ è detta costante di Lamé.

Problema di equilibrio elastico Consideriamo un corpo elastico che nella sua configurazione naturale occupi un dominio V e supponiamo che il corpo sia soggetto a forze esterne applicate sulla superficie libera S_l (ad esempio una pressione esercitata da un fluido o forze dovute al contatto con altri corpi) e nei punti materiali interni (forza di gravità o forze inerziali). Inoltre ammettiamo che una parte S_V della superficie esterna sia vincolata e che su essa siano imposti gli spostamenti $\hat{\mathbf{v}}$. Accettata l'ipotesi dei piccoli spostamenti, sussistono le seguenti equazioni:

Equazioni statiche

$$\mathbf{t}_{x,x} + \mathbf{t}_{y,y} + \mathbf{t}_{z,z} + \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad in \quad V$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad in \quad V$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z \quad su \quad S_l$$

Equazioni cinematiche

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T\right) \qquad in \quad V$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \qquad in \quad S_V$$

Equazioni costitutive

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}\left[\mathbf{E}\right]$$

Queste equazioni costituiscono il *problema di equilibrio elastico* per il corpo in esame, la cui soluzione è costituita dalla terna di campi vettoriali e tensoriali $(\mathbf{v}, \mathbf{E}, \mathbf{T})$, denominata *stato elastico*. E' possibile dimostrare, sotto opportune ipotesi sul legame costitutivo e sulla regolarità dei dati, che la soluzione del problema esiste sempre, è unica e dipende con continuità dai dati. Il problema è quindi, nel linguaggio della Fisica Matematica, *ben posto*. Sono importanti le seguenti osservazioni:

- Le equazioni di equilibrio dovrebbero essere imposte con riferimento alla configurazione che il corpo assume *a seguito* delle azioni ad esso applicate. Questa non è nota a priori ma viene confusa, per l'ipotesi dei piccoli spostamenti, con la configurazione iniziale del corpo.
- Tutte le equazioni del problema, sia differenziali che algebriche, sono lineari. Quindi lo *stato elastico* $(\mathbf{v},\mathbf{E},\mathbf{T})$ dipende linearmente dalle azioni applicate. Questa circostanza permette di applicare il *Principio di Sovrapposizione degli effetti*, valido per tutti i fenomeni fisici governati da leggi lineari. Il Principio permette di determinare gli effetti totali (spostamenti, deformazioni, tensioni) delle azioni applicate come sovrapposizione degli effetti prodotti singolarmente da ogni azione.
- La soluzione analitica del problema è determinabile solo in casi particolari. Comunque esistono metodi di calcolo che permettono di determinare in generale la soluzione per via numerica, anche in ipotesi più ampie di quelle qui considerate, quindi rimuovendo l'ipotesi dei piccoli spostamenti e considerando legami costitutivi più generali rispetto a quello elastico lineare.