Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-K)

Modulo II

A.A. 2011-2012 Appello 18/07/2012 Traccia A

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Assegnata l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine

$$x'' - \frac{t+2}{t}x' + \frac{t+2}{t^2}x = 0$$

con $t \in I = (0, +\infty)$, denotato con V_0 lo spazio vettoriale reale delle soluzioni della stessa, dimostrare che l'insieme $\{t, te^t\}$ costituisce una base di V_0. Giustificare esaurientemente la risposta elencando i teoremi di cui si fa uso.

....

....

....

....

2) Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale delle funzioni composte (o regola della catena). Siano $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ una funzione definita in una regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$ in D

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} \sigma_1(u, v) \\ \sigma_2(u, v) \\ \sigma_3(u, v) \end{pmatrix}$$

per ogni $(u, v) \in D$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

cioè tale che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ risulti

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Detta $\mathbf{G} = \mathbf{F} \circ \sigma$, $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, dimostrare che

$$\frac{\partial G_2}{\partial v}(u, v) = DF_2(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

....

....

....

....

3) Data la funzione

$$f(x, y) = xy(x^2 + 4y^2 - 1)$$

determinarne i punti stazionari e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 8e^{2x}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Assegnato l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq 2x\}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x)$ lungo la frontiera ∂D di tale insieme orientata in senso antiorario. Verificare la validità del Teorema di Gauss-Green nel piano. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-K)

Modulo II

A.A. 2011-2012 Appello 18/07/2012 Traccia B

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Assegnata la funzione $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + y^2 + \frac{1}{z} + xz$, verificare che $P(1,0,1)$ è un punto stazionario di f. Successivamente, se ne studi la natura, enunciando la condizione sufficiente di cui si fa uso.

....

....

....

....

2) Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale delle funzioni composte (o regola della catena). Siano $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ una funzione definita in una regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$ in D

$$\sigma(u,v) := \begin{pmatrix} \sigma_1(u,v) \\ \sigma_2(u,v) \\ \sigma_3(u,v) \end{pmatrix}$$

per ogni $(u,v) \in D$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

cioè tale che per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ risulti

$$\mathbf{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Detta $\mathbf{G} = \mathbf{F} \circ \sigma$, $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, dimostrare che

$$\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v) = DF_2(\sigma(u,v))\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Data la funzione

$$f(x,y) = xy(4x^2 + y^2 - 1)$$

determinarne i punti stazionari e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = 10e^{-x}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Assegnato l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x\}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}(x,y) = (3y, x^2)$ lungo la frontiera ∂D di tale insieme orientata in senso antiorario. Verificare la validità del Teorema di Gauss-Green nel piano. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)