Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-K)

Modulo II

A.A. 2011-2012 Appello 3/07/2012 Traccia A

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $Lip(f) = L$. Dimostrare che f è misurabile (secondo Lebesgue). Dire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando esaurientemente la risposta.

1. f è assolutamente continua.

2. f è derivabile in $\mathbb{R}$.

3. f è derivabile quasi ovunque in $\mathbb{R}$, f' è sommabile su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e $\forall x, y \in [a, b]$, $x < y$, risulta

$$\int_x^y f'(t)\, dt = f(y) - f(x)$$

Inoltre, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|f'(x)| \leq L$.

....

....

....

....

2) Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale totale. Stabilire se la funzione $f(x, y) = x^2 + |xy| + 2y$ è differenziabile in $(0, 0)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 y(x^2 - y - 4)$$

calcolare, se esiste, la derivata direzionale di f nel punto $(1, 0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}(1, 2)$. Determinarne i punti stazionari studiandone la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y' = 6x^2 + 13 - 2\cos x \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

Stabilire la natura del punto stazionario $x = 0$ della soluzione del problema di Cauchy. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_\Omega 2yz\, dxdydz$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{x}\}$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-K)

Modulo II

A.A. 2011-2012 Appello 3/07/2012 Traccia B

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $Lip(f) = L$. Dimostrare che f è assolutamente continua. Dire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette, giustificando esaurientemente la risposta.

1. f è misurabile (secondo Lebesgue).

2. f è derivabile in $\mathbb{R}$.

3. f è derivabile quasi ovunque in $\mathbb{R}$, f' è sommabile su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e $\forall x, y \in [a, b]$, $x < y$, risulta

$$\int_x^y f'(t)\,dt = f(y) - f(x)$$

Inoltre, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|f'(x)| \leq L$.

....

....

....

....

2) Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale totale. Stabilire se la funzione $f(x,y) = y^2 + |xy| + 2x$ è differenziabile in $(0,0)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Data la funzione
$$f(x,y) = x^2y(x^2 + y - 4)$$
calcolare, se esiste, la derivata direzionale di f nel punto $(-1,0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $\mathbf{v}(2,-1)$. Determinarne i punti stazionari studiandone la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''' + y' = 2\sin x - 6x^2 - 11 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

Stabilire la natura del punto stazionario $x = 0$ della soluzione del problema di Cauchy. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale triplo
$$\iiint_\Omega 2xz \, dxdydz$$
dove $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{y}\right\}$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)